Colle de **mathématiques**

1 Séries Entières

L'étudiant doit :

1. Reconnaître une série entière d'une variable réelle ou complexe.
2. Savoir dire que le rayon de convergence R d'une série entière est le réel positif ou $+\infty$ tel que : si $|z| < R$, la série entière converge absolument et la suite $(a_n z^n)_n$ est bornée et si $|z| > R$, la série entière diverge grossièrement et la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée.
3. connaître la définition de l'intervalle ouvert de convergence (pour une variable réelle) et le disque ouvert de convergence (pour une variable complexe) et savoir les représenter graphiquement.
4. savoir déterminer le rayon de convergence :
   — soit par la règle de D'Alembert.
   — soit en trouvant r tel que $\rho < r \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n\rho^n$ cv abs et dire que $r \leq R$ et trouver $\rho \geq r$ tel que $\sum_{n\geq 0} a_n\rho^n$ dv grossièrement et dire que $r \geq R$ et conclure $r = R$.
5. Savoir utiliser les propriétés : Soit deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n\, z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

   1. $a_n = O(b_n) \Longrightarrow R_a \geq R_b$.
   2. $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \Longrightarrow R_a = R_b$.
   3. $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, |a_n| \leq |b_n| \Longrightarrow R_a \geq R_b$.
   4. Si R est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)\, z^n$, alors $R \geq \text{ Inf}(R_a, R_b)$.

      Si $R_a \neq R_b$, $R = \text{ Inf}(R_a, R_b)$.

      Et $\forall |z| < \text{ Inf}(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n$.
   5. Si R est le rayon de convergence de la série produit $\sum_{n\geq 0} c_n\, z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$, alors $R \geq \text{ Inf}(R_a, R_b)$ et

      $\forall |z| < \text{ Inf}(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n\right)$.
   6. Si $\lambda \neq 0$, les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n\, z^n$ ont même rayon de convergence et $\forall |z| < R_a$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n\, z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$.
6. savoir démontrer qu'une série entière à variable réelle converge normalement sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence et de donner un exemple d'une série entière ne convergeant pas normalement sur $]-R, R[$.
7. savoir que la somme S d'une série entière à variable réelle est continue, C^∞ sur $]-\infty, \infty[$, $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$, qu'on peut intégrer terme à terme sur tout segment de $]-R, R[$.
8. deux séries entières sont égales sur un intervalle du type $]-r, r[$ ssi leurs coeffs sont égaux. Conséquence pour une fonction paire, impaire.
9. savoir démontrer qu'une fonction f est C^∞ sur un intervalle du type $]-r, r[$ en montrant qu'elle est la somme d'une série entière sur cet intervalle.
10. la définition d'une fonction développable en série entière, son lien avec la série de Taylor.
11. connaître l'exemple : $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongeable en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais non développable en série entière.
12. savoir faire la méthode de l'équation différentielle pour obtenir un DSE d'une fonction f : l'exemple $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ où α est un réel indépendant de x.
13. savoir retrouver les DSE de sin, cos , ch, sh, $x \mapsto ln(1 \pm x)$, arctan, arcsin, arccos.
14. connaître parfaitement les DSE de exp, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, cos , sin, ch, sh, $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

2 Espérances et Variances

Pour ce chapitre, les résultats du précédent chapitre sur les probabilités doivent être connus L'étudiant doit :

1. connaître la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète, connaître le théorème de transfert, la linéarité, la positivité et la croissance de l'espérance, espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes.
2. définition d'un moment d'ordre m.
3. définition et condition d'existence d'une variance,d'un écart type, formule de König-Huyghens, $V(aX + b) = a^2V(X)$.
4. connaître et savoir retrouver les espérances et variances des lois usuelles.