classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n^\circ 17$ du 2 Février 2026**

CETTE SEMAINE, la colle aura le FORMAT SUIVANT :

1. 1 question de cours parmi celles proposées ci-dessous.
2. Un premier exercice sur les variables aléatoires
3. Un deuxième exercice sur les séries entières.

1 Questions de cours

1. Définir une variable suivant une loi uniforme, une loi de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
2. Donner la définition du rayon de convergence : c'est la borne supérieure de $\{r \in \mathbb{R}^+/(a_n r^n)_n$ est bornée $\}$ ou $\{r \in \mathbb{R}^+/ \sum\limits_{n\geq 0} a_n r^n$ est bornée $\}$.
3. Donner la nature d'une série entière.
4. Montrer qu'une série entière d'une variable réelle converge normalement sur tout segment de son intervalle ouvert de convergence.
5. Citer les propriétés de la somme d'une série entière (continuité, dérivabilité, primitives).

2 Variables aléatoires

Bien sûr, vous devez savoir appliquer les formules des probabilités composées,totales, formule de Bayes et autres propriétés permettant de calculer les probas.

1. La notation $(X \in U), (X = a)$, opérations .
2. Loi de probabilité d'une v.a.d
   (a) Pour trouver la loi de X, je procède de la manière suivante :
      i. Je donne $X(\Omega)$, c'est à dire toutes les issues possibles. On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
      ii. On se donne une issue x_i et je dois calculer $P(X = x_i)$. Pour cela, j'écris $(X = x_i)$ à l'aide d'une réunion, ou/et intersection ou/et contraire d'événements dont il est plus facile d'étudier la proba. et nous amène à utiliser les formules vues au chapitre Espaces probabilisés.

   (b) Comment savoir si X est une v.a lorsqu'on nous donne une suite $(p_n)_n$ telle que $P(X = x_n) = p_n$: je dois montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq 0, \sum\limits_{n\geqslant 0} p_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

   (c) Les lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson .
3. Couple de variables aléatoires discrètes : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles.
4. Variables aléatoires indépendantes, mutuellement indépendantes : définitions, la propriété : Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.
   (a) Alors, pour toute partie I finie de $\mathbb{N}$, pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de $(X_i(\Omega))_{i\in I}$,
   $$P(\bigcap_{i\in I} (X_i \in A_i)) = \prod_{i\in I} P((X_i \in A_i))$$
   (b) Soient f et g deux fonctions à plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que l'on peut définir les variables aléatoires $f(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_p})$ et $g(X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots, X_{k_q})$ où $\{i_1, \cdots, i_p\} \cap \{k_1, \cdots, k_q\} = \emptyset$.
   $f(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_p})$ et $g(X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots, X_{k_q})$ sont indépendantes.

3 Séries entières

Les attendus de ce chapitre sont

1. Savoir reconnaître une série entière, attention aux séries lacunaires !
2. Connaître la nature des séries entières à l'intérieur puis l'extérieur du disque ouvert de convergence (ou intervalle ouvert de convergence).
3. Calcul du rayon de convergence :
   (a) Soit appliquer la règle de D'Alembert : attention, interdit d'écrire $R = \frac{1}{l}$, il faut rédiger en deux temps :
      — d'abord je cherche la limite de $\left|\dfrac{a_{n+1}\, z^{n+1}}{a_n\, z^n}\right|$, je trouve
      — soit 0 alors la série entière est toujours absolument cv et $R = +\infty$,
      — soit $+\infty$ alors la série entière est toujours grossièrement dv et $R = 0$,
      — soit $l|z|$, alors cv abs pour $|z| < \frac{1}{l}$, je fais un dessin et je trouve $R \geq \frac{1}{l}$ puis dv grossière pour $|z| > \frac{1}{l}$, je fais un dessin et je trouve $R \leq \frac{1}{l}$ d'où $R = \frac{1}{l}$.
      — Attention aux séries lacunaires ! ! !

(b) soit des comparaisons entre les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ quand $|a_n| \leq |b_n|, a_n = O(b_n), a_n \sim b_n$.

4. Rayon de convergence d'une somme, d'un produit externe, interne de deux séries entières : bien connaître et savoir reconnaître un produit de Cauchy.
5. Propriétés de la somme d'une série entière :
   — Convergence normale sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, continuité de la somme.
   — Intégration d'une série entière, primitives de la somme.
   — La somme d'une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, identification de deux séries entières.
   — Utilisation d'une série entière pour montrer qu'une application est C^∞. (ex : $x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$)