Colle de **mathématiques**

ATTENTION : *Une colle sera du type d'un oral de* ***CCINP****, à savoir deux exercices, un exercice d'algèbre et un exercice d'analyse. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître* ***signalées en gras****, elles pourront vous être demandées en début de colle.*

• ***Comment préparer une colle ?*** *: Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.*

• ***Notation*** *: Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure strictement à 10.*

• ***Après la colle*** *: Je vous conseille très fortement de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.*

N'hésitez pas à venir nous poser des questions*. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle.*

1 Algèbre

1.1 Diagonalisation

1. Définition .
2. Les différentes caractérisations pour montrer qu'un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable.
3. Cas où le spectre est réduit à un singleton.
4. Cas où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, où l'endomorphisme d'un espace de dimension n a n valeurs propres distinctes.
5. Caractérisation de la diagonalisation par les polynômes annulateurs. Savoir que si l'endomorphisme est diagonalisable alors son polynôme annulateur scindé à racines simples est $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes. Caractérisation des sev stables par un endomorphisme diagonalisable.

1.2 Trigonalisation

1. Définition .
2. Caractérisation par le polynôme caractéristique scindé.
3. Nous avons vu trois exemples de trigonalisations en dim 3. Attention, au programme la trigonalisation d'une matrice ou d'un endo doit être guidée.

1.3 Applications à la réduction

1. Calcul des puissances d'une matrice ou d'un endomorphisme.
2. Calcul de l'inverse.
3. Étude des suites récurrentes linéaires.
   (a) Savoir donner le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 soit à coeffs complexes, soit à coeffs réels. Énoncé du théorème à connaître parfaitement.
   (b) Savoir adapter la démonstration du théorème précédent pour déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre $p \geq 3$.

Savoir-faire :

1. *Connaître 5 méthodes (CNS) pour montrer qu'un endomorphisme (ou qu'une matrice) est diagonalisable.*
2. *Connaître une C.S mais non nécessaire pour montrer qu'un endomorphisme (ou qu'une matrice) est diagonalisable.*
3. *Savoir diagonaliser une matrice. Bien faire la différence entre montrer que la matrice est diagonalisable et diagonaliser la matrice*
4. *Savoir trouver les sev stables par un endomorphisme diagonalisable.*
5. *Connaître 2 méthodes pour savoir si un endo (ou une matrice) est diagonalisable.*
6. *Bien avoir en tête les exemples de trigonalisation faits en cours.*
7. *savoir comment utiliser la réduction pour calculer les puissances ou l'inverse d'une matrice*
8. *Savoir donner le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 soit à coeffs complexes, soit à coeffs réels. Énoncé du théorème à connaître parfaitement.*
9. *Savoir adapter la démonstration du théorème précédent pour déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre $p \geq 3$.*

2 Analyse

2.1 Démonstrations à savoir

- Connaître les formulations des lois uniforme, de Bernoulli, binomiale, de Poisson et géométrique.
- Savoir justifier que la formulation d'une loi de Poisson définit bien une loi de probabilités (justification du cours). Par extension, savoir le faire pour une loi géométrique.
- inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

2.2 Variables aléatoires discrètes (V.A.D) :

- Définition, opération sur les V.A.D. ; loi d'une V.A.D.
- Fonction de répartition d'une V.A.D.
- Loi uniforme $\mathcal{U}(E)$ où E est une partie finie de $\mathbb{R}$.
- Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$; loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$; loi géométrique $\mathcal{G}(p)$; loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
- Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson.
- Espérance d'une V.A.D.
  Théorème de transfert.
- Espérance des lois usuelles (Bernoulli,uniforme, binomiale, géométrique et Poisson)
- Variance et écart-type. Propriétés. Variance des lois usuelles.
- Covariance, inégalité de Cauchy-Schwarz. Propriétés.
- Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Loi marginales. Lois conditionnelles.
- Variables aléatoires indépendantes. Variance du produit de deux v.a. dans ce cas. En conséquence : Si deux v.a. sont indépendantes, leur covariance est nulle. La réciproque est fausse.
- Fonctions génératrices : définition, propriétés.
- Si $R > 1$, alors X^2 admet une espérance finie et $G'_X(1) = E(X),\ G''_X(1) = E(X(X-1))$.
  Dans ce cas, $Var(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$
  X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $E(X) = G'_X(1)$.
  X admet une variance $V(X)$ si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 et, si tel est le cas, $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.
- Fonction génératrice d'une somme de v.a. indépendantes.
- Fonctions génératrices de v.a. suivant les lois usuelles.
- Convergence et approximation : inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres

On peut vous interroger sur les différentes loi, leur formulation et savoir illustrer des cas où certaines s'appliquent, dans la mesure du possible.