Colle de **mathématiques**

1 Espérances et Variances

Pour ce chapitre, les résultats du précédent chapitre sur les probabilités doivent être connus L'étudiant doit :

1. connaître la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète, connaître le théorème de transfert, la linéarité, la positivité et la croissance de l'espérance, espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes.
2. définition d'un moment d'ordre m.
3. définition et condition d'existence d'une variance,d'un écart type, formule de König-Huyghens, $V(aX+b) = a^2V(X)$.
4. **connaître et savoir retrouver les espérances et variances des lois usuelles**.
5. Définition de la covariance de deux v.a.d admettant des moments d'ordre 2 et les propriétés : Inégalité de Cauchy-Schwarz. $Cov(X,X) = V(X), Cov(X,Y) = Cov(Y,X), Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z)+Cov(Y,Z), Cov(aX,bY) = abCov(X,Y)$ .Si X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X,Y) = 0$ mais la réciproque est fausse. $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$. Si X et Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ et généralisation pour une famille de v.a.d mutuellement indépendantes.
6. Fonction génératrice de X : définition, propriété : caractère C^∞ sur $]-1,1[$, lien avec les dérivées successives en 0 et la loi de probabilité de X, Comment retrouver l'espérance et la variance à partir de G_X, **fonction génératrice des lois usuelles**, fonction génératrice d'une somme de deux v.a indépendantes.
7. Inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev, Loi faible des grands nombres :**Enoncés et démonstrations**

2 Intégrales à paramètre

Les étudiants doivent savoir énoncer et appliquer les théorèmes suivants :

1. *Théorème de continuité des intégrales à paramètre* :
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I\times J,\mathbb{K})$.
   On suppose :
   1. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
   2. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   3. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists\varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I\times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — $\forall K = [a,b]$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in [a,b]\times J, |f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,
   $$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$ est continue sur I.
2. *Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre*, appelé aussi *Théorème de Leibniz* :
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I\times J,\mathbb{K})$.
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
   2. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est C^1 sur I.
   Sa dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et est à nouveau considérée comme fonction de deux variables :
   3. $\forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   4. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists\varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I\times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — $\forall K = [a,b]$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in K\times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,
   $$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$ est de classe C^1 sur I et
   $$\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

3. Soit un entier k supérieur ou égal à 1.
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
   2. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur I.

   Ses dérivées successives sont notées $\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}$ où $1 \leq i \leq k$ et est à nouveau considérée comme fonction de deux variables
   3. $\forall 1 \leq i \leq k-1,\ \forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
   4. $\forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J .
   5. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — soit locale : $\forall K$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in K \times J, |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$

   Alors,
   $$g: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)dt \end{array} \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \text{ et}$$
   $$\forall 1 \leq i \leq k,\ \forall x \in I, g^{(i)}(x) = \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$$

4. *Théorème de convergence dominée à paramètre continu*
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$, a un élément ou une borne finie ou non de I .
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   2. $\forall t \in J, \lim\limits_{x \to a} f(x,t) = l(t)$.
   3. $\forall x \in I, t \mapsto l(t)$ est continue par morceaux sur J.
   4. *Hypothèse de domination* : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

   l est intégrable sur J et
   $$\lim_{x \to a} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J l(t)\mathrm{d}t$$
   On retiendra trois méthodes pour trouver une limite d'une fonction définie par une intégrale à paramètre :
   — Encadrement et théorème des gendarmes.
   — Changement de variable pour faire sortir le paramètre de l'intégrale.
   — théorème de convergence dominé à paramètre continu. (parfois cette méthode est appliquée après la précédente)
5. **Un exemple fondamental : La Fonction Gamma** Γ : On définit la fonction Γ par
   $$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$
   Vous devez savoir montrer les points suivants :
   (a) Γ est définie et continue sur $]0, +\infty[$
   (b) Γ est C^∞ sur $]0, +\infty[$
   (c) $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.
   (d) $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n!$
   (e) Γ' croissante et il existe $c \in]1, 2[, \Gamma'(c) = 0$. En déduire le tableau de variations.
   (f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = 0$ (on utilise une minoration à partir de (c))
   (g) $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$