classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°18$ du 9 Février 2026**

CETTE SEMAINE, la colle aura le FORMAT SUIVANT :

1. 1 question de cours parmi celles proposées ci-dessous.
2. Un premier exercice sur les séries entières.
3. Un deuxième exercice sur les lois de probabilité avec calcul d'espérance.

1 Questions de cours

1. Montrer qu'une série entière d'une variable réelle converge normalement sur tout segment de son intervalle ouvert de convergence.
2. Donner sans démo les DSE avec leur rayon de cv de $\frac{1}{1\pm x}, \exp, \cos, \sin, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}$.
3. Démonstration par la méthode de l'équation différentielle de $(1+x)^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Retrouver les DSE de $\mathrm{Arctan}\,, \ln(1 \pm x)$.
5. Calcul des espérances des v.a usuelles.

2 Espérances de Variables aléatoires discrètes

Bien sûr, vous devez savoir appliquer les formules des probabilités composées,totales, formule de Bayes et autres propriétés permettant de calculer les probas, puis les lois de probabilités des v.a usuelles.
Espérance :

1. Définition : Soit $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ où I est une partie au plus dénombrable de $\mathbb{N}$.
   On dit que X est d'espérance finie lorsque la série $\sum_{i \in I} x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)$ est absolument convergente. Sa somme est appelée , Espérance de X, et notée $E(X)$: $E(X) = \sum_{i\in I} x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)$.
2. Pour une variable aléatoire discrète **à valeurs dans** $\mathbb{N}$, X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geq k)$ converge et dans ce cas, $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$.
3. Linéarité de l'espérance, positivité, croissance, espérance d'un produit de deux variables indépendantes.
4. Espérance des v.a usuelles.

3 Séries entières

Les attendus de ce chapitre sont

1. Savoir reconnaître une série entière, attention aux séries lacunaires !
2. Connaître la nature des séries entières à l'intérieur puis l'extérieur du disque ouvert de convergence (ou intervalle ouvert de convergence).
3. Calcul du rayon de convergence :
   (a) Soit appliquer la règle de D'Alembert : attention, interdit d'écrire $R = \frac{1}{l}$, il faut rédiger en deux temps :
   - d'abord je cherche la limite de $\left| \dfrac{a_{n+1}\, z^{n+1}}{a_n\, z^n} \right|$, je trouve
   - soit 0 alors la série entière est toujours absolument cv et $R = +\infty$,
   - soit $+\infty$ alors la série entière est toujours grossièrement dv et $R = 0$,
   - soit $l|z|$, alors cv abs pour $|z| < \frac{1}{l}$, je fais un dessin et je trouve $R \geq \frac{1}{l}$ puis dv grossière pour $|z| > \frac{1}{l}$, je fais un dessin et je trouve $R \leq \frac{1}{l}$ d'où $R = \frac{1}{l}$.
   - Attention aux séries lacunaires ! ! !

   (b) soit des comparaisons entre les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ quand $|a_n| \leq |b_n|, a_n = O(b_n), a_n \sim b_n$.
4. Rayon de convergence d'une somme, d'un produit externe, interne de deux séries entières : bien connaître et savoir reconnaître un produit de Cauchy.
5. Propriétés de la somme d'une série entière :
   - Convergence normale sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, continuité de la somme.
   - Intégration d'une série entière, primitives de la somme.
   - La somme d'une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, identification de deux séries entières.
   - Utilisation d'une série entière pour montrer qu'une application est C^∞. (ex : $x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$)
6. Fonctions développables en série entière au voisinage de 0 : définition, série de Taylor.
7. Développements en série entière classiques : $\frac{1}{1\pm x}, \exp, \cos, \sin, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}$, $(1+x)^\alpha$ (avec méthode utilisant une équation différentielle), fonction rationnelle, penser à utiliser la dérivation pour obtenir les DSE de $\ln(1 \pm x), \arcsin, \arccos, \arctan$.