Colle de **mathématiques**

ATTENTION : *Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices, un exercice d'algèbre et un exercice d'analyse. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.*
• ***Comment préparer une colle ?*** *: Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.*
• ***Notation*** *: Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure strictement à 10.*
• ***Après la colle*** *: Je vous conseille très fortement de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.*
N'hésitez pas à venir nous poser des questions*. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle.*

1 Réduction

1.1 Diagonalisation

1. Définition .
2. Les différentes caractérisations pour montrer qu'un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable.
3. Cas où le spectre est réduit à un singleton.
4. Cas où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, où l'endomorphisme d'un espace de dimension n a n valeurs propres distinctes.
5. Caractérisation de la diagonalisation par les polynômes annulateurs. Savoir que si l'endomorphisme est diagonalisable alors son polynôme annulateur scindé à racines simples est $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$ où $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes. Caractérisation des sev stables par un endomorphisme diagonalisable.

1.2 Trigonalisation

1. Définition .
2. Caractérisation par le polynôme caractéristique scindé.
3. Nous avons vu trois exemples de trigonalisations en dim 3. Attention, au programme la trigonalisation d'une matrice ou d'un endo doit être guidée.

1.3 Applications à la réduction

1. Calcul des puissances d'une matrice ou d'un endomorphisme.
2. Calcul de l'inverse.
3. Étude des suites récurrentes linéaires.
   (a) Savoir donner le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 soit à coeffs complexes, soit à coeffs réels. Énoncé du théorème à connaître parfaitement.
   (b) Savoir adapter la démonstration du théorème précédent pour déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre $p\geq 3$.

Savoir-faire :

1. *Connaître 5 méthodes (CNS) pour montrer qu'un endomorphisme (ou qu'une matrice) est diagonalisable.*
2. *Connaître une C.S mais non nécessaire pour montrer qu'un endomorphisme (ou qu'une matrice) est diagonalisable.*
3. *Savoir diagonaliser une matrice. Bien faire la différence entre montrer que la matrice est diagonalisable et diagonaliser la matrice*
4. *Savoir trouver les sev stables par un endomorphisme diagonalisable.*
5. *Connaître 2 méthodes pour savoir si un endo (ou une matrice) est diagonalisable.*
6. *Bien avoir en tête les exemples de trigonalisation faits en cours.*
7. *savoir comment utiliser la réduction pour calculer les puissances ou l'inverse d'une matrice*
8. *Savoir donner le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 soit à coeffs complexes, soit à coeffs réels. Énoncé du théorème à connaître parfaitement.*
9. *Savoir adapter la démonstration du théorème précédent pour déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre $p\geq 3$.*

2 Intégrales à paramètre

2.1 A savoir

- Enoncé du théorème de continuité des intégrales à paramètre (avec hypothèse de domination globale ou locale)
- Enoncé du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre (avec hypothèse de domination globale ou locale)
- Enoncé du théorème montrant qu'une fonction définie par une intégrale à paramètre est de classe $C^k, k\geq 2$.
- Exemple de la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$: savoir démontrer qu'elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, savoir montrer que la dérivée s'annule en un unique réel compris entre 1 et 2, ses limites en 0 et $+\infty$.

3 Corrections des sujets 1 et 2 d'analyse et d'algèbre du concours blanc