Colle de **mathématiques**

Pour cette semaine , vous aurez trois exercices selon le programme suivant :

1. Un exercice portant sur la correction du sujet Niveau CCINP du Concours Blanc.
2. Un exercice sur les intégrales à paramètre.
3. Un exercice sur les espaces vectoriels normés.

1 Intégrales à paramètre

Les étudiants doivent savoir énoncer et appliquer les théorèmes suivants :

1. *Théorème de continuité des intégrales à paramètre* :
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I \times J, \mathbb{K})$.
   On suppose :
   1. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
   2. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   3. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — $\forall K = [a,b]$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, |f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,
   $$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ est continue sur } I.$$
2. *Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre*, appelé aussi *Théorème de Leibniz* :
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$.
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
   2. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est C^1 sur I.
   Sa dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et est à nouveau considérée comme fonction de deux variables :
   3. $\forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   4. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — $\forall K = [a,b]$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in K \times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,
   $$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et}$$
   $$\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$
3. Soit un entier k supérieur ou égal à 1.
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
   2. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur I.
   Ses dérivées successives sont notées $\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}$ où $1 \leq i \leq k$ et est à nouveau considérée comme fonction de deux variables
   3. $\forall 1 \leq i \leq k-1,\ \forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
   4. $\forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J .
   5. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — soit locale : $\forall K$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in K \times J, |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,
   $$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)dt \end{array} \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \text{ et}$$
   $$\forall 1 \leq i \leq k,\ \forall x \in I, g^{(i)}(x) = \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$$
4. *Théorème de convergence dominée à paramètre continu*
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$, a un élément ou une borne finie ou non de I .
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   2. $\forall t \in J, \lim\limits_{x \to a} f(x,t) = l(t)$.

3. $\forall x \in I, t \mapsto l(t)$ est continue par morceaux sur J.
4. *Hypothèse de domination* : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

l est intégrable sur J et

$$\lim_{x \to a} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J l(t)\mathrm{d}t$$

On retiendra trois méthodes pour trouver une limite d'une fonction définie par une intégrale à paramètre :
— Encadrement et théorème des gendarmes.
— Changement de variable pour faire sortir le paramètre de l'intégrale.
— théorème de convergence dominé à paramètre continu. (parfois cette méthode est appliquée après la précédente)

5. **Un exemple fondamental : La Fonction Gamma** Γ : On définit la fonction Γ par

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Vous devez savoir montrer les points suivants :
(a) Γ est définie et continue sur $]0, +\infty[$
(b) Γ est C^∞ sur $]0, +\infty[$
(c) $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.
(d) $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n!$
(e) Γ' croissante et il existe $c \in]1,2[, \Gamma'(c) = 0$. En déduire le tableau de variations.
(f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \Gamma(x) = 0$ (on utilise une minoration à partir de (c))
(g) $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$

2 Espaces vectoriels normés

Les attendus de ce chapitre sont :

1. Savoir démontrer qu'une application est une norme. (Cas particulier : si une application contient une racine carrée , c'est qu'elle doit découler d'un produit scalaire. Alors, on devine l'application qui est le produit scalaire et on montre qu'elle en est un).
2. Connaître les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$, sur tout espace vectoriel de dimension finie, sur $C([a,b],\mathbb{R})$. On retient que la norme usuelle sur $\mathbb{R}$ est la valeur absolue et celle sur $\mathbb{C}$ est le module.
3. Savoir définir une boule ouverte, une boule fermée, une sphère, une partie convexe, une partie (rep : fonction, suite) bornée.
4. montrer que deux normes sont équivalentes ou pas.
5. dire l'intérêt que deux normes soient équivalentes, utiliser que dans tout espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
6. définir la convergence d'une suite de vecteurs dans un evn. $(x_n)_n$ cv vers l dans $(E, \|.\|)$ ssi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|x_n - l\| = 0$.
7. Lorsque E est de dimension finie, étudier la convergence d'une suite de vecteurs ést équivalent à étudier la convergence des suites coordonnées.