

CETTE SEMAINE, la colle aura le FORMAT SUIVANT :

1. 1 question de cours qui comportera :
 - (a) L'énoncé d'un développement en série entière classique **avec son intervalle ouvert de convergence**.
 - (b) Une question ou démo sur le chapitre : Probabilités 2ième Partie
 - (c) Montrer que l'une des applications citées en paragraphe 2 est une norme.
2. Un exercice court sur les fonctions développables en séries entières.
3. Un exercice court sur le chap : Probabilités 2ième Partie

1 Fonctions développables en Séries entières

Les attendus de ce chapitre sont

1. Fonctions développables en série entière au voisinage de 0 : définition, série de Taylor.
2. Développements en série entière classiques : $\frac{1}{1 \pm x}$, $\exp$, $\cos$, $\sin$, sh , ch , $(1+x)^\alpha$ (avec méthode utilisant une équation différentielle), fonction rationnelle, penser à utiliser la dérivation pour obtenir les DSE de $\ln(1 \pm x)$, $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$.

2 Probabilités : 2ième Partie

Bien sûr, vous devez savoir appliquer les formules des probabilités composées, totales, formule de Bayes et autres propriétés permettant de calculer les probas, puis les lois de probabilités des v.a usuelles.

1. Espérance
 - Définition : Soit $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ où I est une partie au plus dénombrable de $\mathbb{N}$.
On dit que X est d'espérance finie lorsque la série $\sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ est absolument convergente. Sa somme est appelée , Espérance de X , et notée $E(X) : E(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$.
 - Pour une variable aléatoire discrète **à valeurs dans** $\mathbb{N}$, X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geq k)$ converge et dans ce cas, $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$.
 - Linéarité de l'espérance, positivité, croissance, espérance d'un produit de deux variables indépendantes.
 - **Espérance des v.a usuelles**
2. Variance : définition, **Formule de König-Huyghens**, $V(aX + b) = a^2 V(X)$, **variance des variables aléatoires usuelles**.
3. Définition de la covariance de deux v.a.d admettant des moments d'ordre 2 et les propriétés :
 - Inégalité de Cauchy-Schwarz. (énoncé seulement)
 - $\operatorname{Cov}(X, X) = V(X)$, $\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(Y, X)$, $\operatorname{Cov}(X + Y, Z) = \operatorname{Cov}(X, Z) + \operatorname{Cov}(Y, Z)$, $\operatorname{Cov}(aX, bY) = ab \operatorname{Cov}(X, Y)$.
 - Si X et Y sont indépendantes, alors $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$ mais la réciproque est fausse.
 - $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y)$.
 - Si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et généralisation pour une famille de v.a.d mutuellement indépendantes. (à savoir absolument)
4. Fonction génératrice de X : définition, propriété :
 - caractère C^∞ sur $] -1, 1[$, lien avec les dérivées successives en 0 et la loi de probabilité de X .
 - Comment retrouver l'espérance et la variance à partir de G_X , fonction génératrice des lois usuelles.
 - fonction génératrice d'une somme de deux v.a indépendantes.
 - **Démo (*) La somme de deux variables aléatoires suivant une loi de Poisson suit une loi de Poisson.**
 - Inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev, Loi faible des grands nombres : **Enoncés et démonstrations**

3 Espaces Vectoriels Normés

Les attendus sont :

1. Savoir montrer qu'une application est une norme :
 - Si elle n'est pas définie avec $\sqrt{\cdot}$, on vérifie la définition d'une norme (déf 1 du cours).
 - Si elle est définie avec $\sqrt{\cdot}$, on trouve un produit scalaire associé à cette application, on montre que c'est bien un produit scalaire et on conclut en disant que l'application est la norme euclidienne associée.
2. Savoir montrer que les applications suivantes sont des normes :
 - Dans $\mathbb{K}^n$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$.
 - Dans $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_2$
 - Savoir comment adapter ces normes dans un espace vectoriel de dim n . A un vecteur, on lui associe le n -uplet de ses coordonnées dans une base donnée.

- Montrer que $\|\cdot\|_2 : A \mapsto \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui correspond à la norme euclidienne du produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il faut savoir justifier que $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.
- Dans $C([a, b], \mathbb{K})$, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$.
- Dans $C([a, b], \mathbb{K})$, $\|\cdot\|_2$.