Colle de **mathématiques**

Pour cette semaine , vous aurez trois exercices selon le programme suivant :

1. Un exercice portant sur la correction du sujet Niveau CCINP du Concours Blanc.
2. Un exercice sur les espaces vectoriels normés.
3. Un exercice sur la topologie.

1 Espaces vectoriels normés

Les attendus de ce chapitre sont :

1. Savoir démontrer qu'une application est une norme. (Cas particulier : si une application contient une racine carrée , c'est qu'elle doit découler d'un produit scalaire. Alors, on devine l'application qui est le produit scalaire et on montre qu'elle en est un).
2. Connaître les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$, sur tout espace vectoriel de dimension finie, sur $C([a, b], \mathbb{R})$. On retient que la norme usuelle sur $\mathbb{R}$ est la valeur absolue et celle sur $\mathbb{C}$ est le module.
3. Savoir définir une boule ouverte, une boule fermée, une sphère, une partie convexe, une partie (rep : fonction, suite) bornée.
4. montrer que deux normes sont équivalentes ou pas.
5. dire l'intérêt que deux normes soient équivalentes, utiliser que dans tout espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
6. définir la convergence d'une suite de vecteurs dans un evn. $(x_n)_n$ cv vers l dans $(E, \|.\|)$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - l\| = 0$.
7. Lorsque E est de dimension finie, étudier la convergence d'une suite de vecteurs ést équivalent à étudier la convergence des suites coordonnées.

2 Topologie, Limite et Continuité dans un espace vectoriel normé

Les attendus de ce chapitre sont :

1. Donner la définition d'un ouvert, fermé, point adhérent et point intérieur et savoir les utiliser pour des intervalles de $\mathbb{R}$.
2. Utiliser la caractérisation séquentielle d'un fermé, puis d'un point adhérent . Exemple : toute boule fermée est fermée et 0 est un point adhérent à $]0, 1]$.
3. Savoir montrer qu'une partie est dense dans E. Exemple : L'ensemble des matrices inversibles est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Définition d'une limite en $a \in \overline{A}$ de $f : A \subset E \mapsto F$. Utilisation de la caractérisation séquentielle de la limite pour montrer qu'une limite existe ou pas. Exemple : Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas.
5. Définition de la continuité, prolongement par continuité, caractérisation séquentielle de la continuité.
6. Citer et utiliser la propriété :Soit f une application continue de E dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Alors,
   $\{x \in E/f(x) = \alpha\}, \{x \in E/f(x) \le \alpha\}, \{x \in E/f(x) \ge \alpha\}$ sont des parties fermées de E.
   $\{x \in E/f(x) < \alpha\}, \{x \in E/f(x) > \alpha\}$ sont des parties ouvertes de E.
7. Citer et utiliser le théorème de la borne atteinte.
8. Montrer qu'une application est continue en la listant dans une des catégories suivantes :
   (a) Fonction lipchitzienne.
   (b) Application linéaire d'un ev en dimension finie.
   (c) Application bilinéaire d'ev en dimension finie.
   (d) Application polynômiale en les coordonnées
9. Traîter la continuité d'une norme, de $A \mapsto P^{-1}AP$, du produit scalaire, du dét sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
10. Montrer que le noyau de la trace est un fermé, que l'espace des matrices inversibles est un ouvert.