

CETTE SEMAINE, la colle aura le FORMAT SUIVANT :

1. Un exercice sur les espaces vectoriels normés.
2. Un exercice court sur les intégrales à paramètre.

1 Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre, vous devez savoir :

1. Démontrer qu'une application est une norme :
 - soit en utilisant la définition d'une norme.
 - soit en montrant qu'elle est issue d'un produit scalaire qu'il faut définir et montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. **connaître les normes usuelles dans** $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C([a, b], \mathbb{K})$, $L_c^1(I, \mathbb{K})$, $L_c^2(I, \mathbb{K})$, c'est-à-dire savoir les définir et montrer que ce sont des normes.
3. énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, savoir l'appliquer aux produits scalaires usuelle de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. connaître les définitions concernant les boules ouvertes, fermées, sphères et les parties convexes.
5. Définition des normes équivalentes. Savoir que dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Savoir démontrer que les normes usuelles dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.
6. Définition d'une suite de vecteurs convergente, cas particulier de suites de vecteurs d'un evn de dimension finie : il faut et il suffit d'étudier les suites coordonnées.

2 Intégrales à paramètre

Vous devez savoir énoncer et appliquer les théorèmes suivants :

1. Théorème de continuité des intégrales à paramètre.
2. Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre, appelé aussi Théorème de Leibniz.
3. Théorème de convergence dominée à paramètre continu.
4. On retiendra trois méthodes pour trouver une limite d'une fonction définie par une intégrale à paramètre :
 - Encadrement et théorème des gendarmes.
 - Changement de variable pour faire sortir le paramètre de l'intégrale et donner un équivalent
 - théorème de convergence dominée à paramètre continu. (parfois cette méthode est appliquée après la précédente)

Il faut impérativement connaître l'étude de *Gamma* à travers l'exercice suivant :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Γ est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$
5. Γ est C^∞ sur $]0, +\infty[$.
6. Justifier que Γ est convexe.
7. Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$. Qu'en déduit-on ?
8. Donner un équivalent de $\Gamma(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.
9. Donner le tableau de variations de Γ .
10. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$.

Il est souhaitable de connaître l'exercice suivant :

Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

On pose $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$

1. Montrer que f et g sont C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
3. Montrer $x \mapsto (f(x))^2 + g(x)$ est constante sur $\mathbb{R}^+$.
4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$
5. En déduire $\Gamma(\frac{1}{2})$.