Colle de **mathématiques**

ATTENTION : *Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices, un exercice d'algèbre et un exercice d'analyse. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.*

• ***Comment préparer une colle ?*** *: Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.*

• ***Notation*** *: Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure strictement à 10.*

• ***Après la colle*** *: Je vous conseille très fortement de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.*

N'hésitez pas à venir me poser des questions*. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle.*

1 Recherche d'une solution développable en série entière d'une équation différentielle

2 Intégrales à paramètre

2.1 A savoir

- Enoncé du théorème de continuité des intégrales à paramètre (avec hypothèse de domination globale ou locale)
- Enoncé du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre (avec hypothèse de domination globale ou locale)
- Enoncé du théorème montrant qu'une fonction définie par une intégrale à paramètre est de classe $C^k, k \geq 2$.
- Exemple de la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$: savoir démontrer qu'elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, savoir montrer que la dérivée s'annule en un unique réel compris entre 1 et 2, ses limites en 0 et $+\infty$.

3 Espaces préhibertiens réels et Espaces euclidiens

- Produit scalaire et Norme associée : inégalité de Cauchy-Schwarz, **identité de polarisation, exemples classiques**
- Orthogonalité.
- Bases orthonormales d'un espace euclidien : **toute famille finie orthogonale de vecteurs non nuls est libre, coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n**
- Supplémentaires orthogonaux.
- Projecteur orthogonal sur un sev de dimension finie : définition, **expression de $p_F(x)$ à l'aide d'une b.o.n de F**
- Pratique du procédé de Gram-Schmidt.

Savoir-faire : montrer qu'une application est un produit scalaire, qu'une application est une norme associée à un produit scalaire, connaître les produits scalaires classiques dans les espaces courants, montrer qu'une famille est une b.o.n, savoir les conditions pour qu'on puisse écrire $F \oplus F^\perp = E$, savoir déterminer $p_F(x)$ par deux méthodes, savoir utiliser le procédé de Gram-Schmidt

4 Isométries vectorielles

- Définition d'une isométrie vectorielle : définition, **f est une isométrie vectorielle ssi elle conserve le produit scalaire, son spectre est inclus dans** $\{-1, 1\}$
- Matrices orthogonales, groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal.**déterminant d'une matrice orthogonale**
- Produit mixte ou produit vectoriel, la droite orthogonale à un plan dirigé par (u, v) est dirigée par $u \wedge v$