

Colle de mathématiques

ATENTION : Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices, un exercice d'algèbre et un exercice d'analyse. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si, dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.

• **Comment préparer une colle?** : Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.

• **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure strictement à 10.

• **Après la colle** : Je vous conseille très fortement de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.

N'hésitez pas à venir me poser des questions. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle.

1 Espaces préhilbertiens réels et Espaces euclidiens

- Projecteur orthogonal sur un sev de dimension finie : définition, **expression de $p_F(x)$ à l'aide d'une b.o.n de F**
- Pratique du procédé de Gram-Schmidt.

Savoir-faire : montrer qu'une application est un produit scalaire, qu'une application est une norme associée à un produit scalaire, connaître les produits scalaires classiques dans les espaces courants, montrer qu'une famille est une b.o.n, savoir les conditions pour qu'on puisse écrire $F \oplus F^\perp = E$, savoir déterminer $p_F(x)$ par deux méthodes, savoir utiliser le procédé de Gram-Schmidt

2 Isométries vectorielles

- Définition d'une isométrie vectorielle : définition, **f est une isométrie vectorielle ssi elle conserve le produit scalaire, son spectre est inclus dans $\{-1, 1\}$**
- Matrices orthogonales, groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. **déterminant d'une matrice orthogonale**
- Produit mixte ou produit vectoriel, la droite orthogonale à un plan dirigé par (u, v) est dirigée par $u \wedge v$
- Isométries vectorielles d'un plan euclidien : rotation et réflexion .
- Isométries vectorielles d'un espace vectoriel de dimension 3 : rotation, réflexion , composée d'une rotation et réflexion.
- Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien : définition, **les sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux**, théorème spectral.

3 Equations différentielles linéaires

1. Révision des équations différentielles de PCSI : équations différentielles linéaires d'ordre 1, équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
2. Système différentiel linéaire d'ordre 1 : problème de Cauchy, théorème de Cauchy Lipschitz linéaire, structure de l'espace des solutions de l'équation homogène. Cas où l matrice est à coefficients constants diagonalisable ou trigonalisable.