

Colle de mathématiques

1 Questions de cours à connaître

Savoir démontrer :

1. Une isométrie vectorielle est un automorphisme et son spectre est inclus dans $\{-1, 1\}$.
2. Si F est stable par une isométrie vectorielle, alors F^\perp aussi.
3. Le déterminant d'une matrice orthogonale est ± 1 .
4. Théorème de représentation des formes linéaires.
5. Si u est un endomorphisme autoadjoint et F stable par u , alors F^\perp aussi.
6. Pour un endomorphisme autoadjoint, les sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
7. u endomorphisme autoadjoint positif (resp : défini positif) ssi $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$ (resp : $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_*^+$)
8. Soit p projecteur de E . Il est autoadjoint ssi il est orthogonal (i.e $\text{Im } p \perp \text{ker } p$).
9. A matrice symétrique ssi il existe une matrice M telle que $A = {}^tMM$.

2 Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

2.1 Isométries vectorielles - Matrices orthogonales

Les attendus de ce paragraphe sont :

1. Donner la définition d'une isométrie vectorielle et donner ses deux autres caractérisations.
2. Définition d'une matrice orthogonale et ses différentes caractérisations.
3. Orientation d'un espace euclidien.
4. Définition d'un produit mixte et produit vectoriel dans un espace de dimension 3.
5. Savoir décrire les isométries vectorielles d'un plan euclidien.
6. Savoir décrire les rotations et les réflexions d'un ev euclidien de dimension 3.

2.2 Endomorphismes autoadjoints, autoadjoints positifs, définis positifs

Les attendus de ce paragraphe sont :

1. Donner la définition d'un endomorphisme autoadjoint, positif, défini positif.
2. Le lien avec les matrices symétriques, symétriques positives, définies positives.
3. Théorème spectral