classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°2$ du 22 Septembre 2025**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  — Le premier exercice doit contenir :
    — Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
    Deux niveaux de démonstration : niveau $(\star)$ pour les groupes 2,3 et 5.
    — Une application très directe du cours :
  — Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.

- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8. Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.

- **Après la colle** : Avant le vendredi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Compléments d'algèbre linéaire

1.1 Formes linéaires et hyperplans

1. Savoirs attendus :
   (a) Montrer qu'une application est une forme linéaire sur E.
   (b) Les méthodes pour montrer qu'un sev H est un hyperplan de E :
      i. H admet une droite comme supplémentaire.
      ii. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.
      iii. $\dim H = \dim E - 1$.
   (c) Savoir construire un supplémentaire de H : $D = \text{Vect}\,(a)$ où $a \notin H$.
   (d) Savoir déterminer une équation linéaire de H dans une base de E.
2. **Démos à connaître :**
   (a) Savoir montrer que si $a \notin H$ et H est un hyperplan de E , alors $\mathbf{H} \oplus \mathbf{Vect}\,(\mathbf{a}) = \mathbf{E}$
   (b) Niveau $(\star)$: Savoir montrer que H est un hyperplan ssi H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E,

1.2 Produit d'espaces vectoriels

Savoirs attendus :

1. Définition
2. Cas où les e.v sont de dimension finie.
3. Construire une base de $E_1 \times E_2$ à l'aide d'une base de E_1 et d'une base de E_2.

1.3 Matrices par blocs

Savoirs attendus :

1. La notation usuelle d'une matrice par blocs : on sait reconnaître dans un énoncé une matrice par blocs.
2. Produit de matrices par blocs.
3. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

1.4 Matrices semblables

Savoirs attendus :

1. Définition
2. Caractérisation à l'aide d'un endomorphisme.
3. **Deux matrices semblables ont même rang, même déterminant mais réciproque fausse**
4. La méthode pratique pour montrer que deux matrices sont semblables : Je considère l'une comme la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ d'un endo f et je montre que l'autre est la matrice de ce même endo dans une base différente que je cherche.

1.5 Sous espace stable par un endomorphisme

Savoirs attendus :

1. Définition d'un sev stable par $u \in \mathscr{L}(E)$ et de l'endomorphisme de F induit par u.
2. La méthode de rédaction pour montrer qu'un sev est stable par $u \in \mathscr{L}(E)$.
3. **Si f et g sont deux endomorphismes qui commutent, alors**
   (a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ker(f - \lambda Id)$ **(resp :** $\ker(g - \lambda Id)$**) est stable par g (resp : par f)**
   (b) Le noyau et L'image de l'un sont stables par l'autre.

1.6 Trace

Savoirs attendus :

1. Définition d'une matrice carrée et d'un endomorphisme.
2. **L'application Tr est une forme linéaire non nulle, $\mathbf{tr}\,(\mathbf{AB}) = \mathbf{tr}\,(\mathbf{BA})$, deux matrices semblables ont même trace**.
3. **Si p est un projecteur, $\mathbf{tr}\,(p) = \mathbf{rg}\,(p)$**

1.7 Interpolation de Lagrange

Savoirs attendus :

1. Définition de la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associé à un $n+1$-uplet de scalaires deux à deux distincts.
2. **Cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et coordonnées d'un polynôme P dans cette base**.

1.8 Déterminant de Vandermonde

Savoirs attendus :

1. Savoir définir une matrice de Vandermonde.
2. Savoir que lorsque les scalaires sont deux à deux distincts, elle correspond à la matrice de passage d'une base de polynômes de Lagrange vers la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. **connaître le déterminant et savoir le démontrer quand c'est demandé**