Programme de Colle $n°3$
P.S.I
Semaine du 27 Septembre 2021

Une colle sera du type d'un oral de CCINP, à savoir deux exercices, un exercice d'algèbre et un exercice d'analyse. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître signalées en gras, elles pourront vous être demandées en début de colle.
Comment préparer une colle ? : Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.
Notation Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure strictement à 10.
Après la colle : Je vous conseille très fortement de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur. N'hésitez pas à venir nous poser des questions. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle.

Bonne et Joyeuse Annèe de Khôlle. A vous de jouer !!!

1 Complément d'algèbre linéaire

Toute l'algèbre linéaire de Première annèe est supposée acquise.

1. Produit d'espaces vectoriels : définition, dimension dans le cas d'espaces de dim finie. Comment construire une base de $E_1 \times E_2$ connaissant une base de E_1 et de E_2.
2. Base de $\mathbb{C}_n[X]$ en tant que $\mathbb{C}$-e.v et base de $\mathbb{C}_n[X]$ en tant que $\mathbb{R}$-e.v
3. Matrices blocs : définition et produit.
4. **Caractérisation du rangd'une application linéaire par une matrice par blocs. Traduction matricielle** : Soit E et F deux $\mathbb{K}$.e.v de dimension finie. On note $p = \dim E$ et $n = \dim F$, B_E une base de E et B_F une base de F
   Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
   $$\text{rg }(f)\text{=r}$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$\text{il existe une base de } E \text{ et une base de } F \text{ dans lesquelles la matrice de } f \text{ est}$$
   $$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$
   Corollaire : Soient $(n, p, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   $$\text{rg }(f)\text{=r}$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$\text{il existe } (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}) \text{ telles que } A = P \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix} Q.$$
5. Déterminant des matrices par blocs.
6. Matrices semblables : définition, interprétation en tant que matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes, conséquences sur le rang, déterminant