Colle de **mathématiques**

1 Compléments d'algèbre linéaire

1.1 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Savoirs attendus :

1. Montrer qu'une application est une forme linéaire sur E.
2. Les méthodes pour montrer qu'un sev H est un hyperplan de H :
   (a) H admet une droite comme supplémentaire.
   (b) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.
   (c) $\dim H = \dim E - 1$.
3. Savoir construire un supplémentaire de H : $D = \mathrm{Vect}(a)$ où $a \notin H$.
4. Savoir déterminer une équation linéaire de H dans une base de E.

1.2 Produit d'espaces vectoriels

Savoirs attendus :

1. Définition
2. Cas où les e.v sont de dimension finie.
3. Construire une base de $E_1 \times E_2$ à l'aide d'une base de E_1 et d'une base de E_2.

1.3 Matrices par blocs

Savoirs attendus :

1. La notation usuelle d'une matrice par blocs : on sait reconnaître dans un énoncé une matrice par blocs.
2. Produit de matrices par blocs.
3. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

1.4 Matrices semblables

Savoirs attendus :

1. Définition
2. Caractérisation à l'aide d'un endomorphisme.
3. **Deux matrices semblables ont même rang, même déterminant mais réciproque fausse**
4. La méthode pratique pour montrer que deux matrices sont semblables : Je considère l'une comme la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ d'un endo f et je montre que l'autre est la matrice de ce même endo dans une base différente que je cherche.

1.5 Sous espace stable par un endomorphisme

Savoirs attendus :

1. Définition d'un sev stable par $u \in \mathscr{L}(E)$ et de l'endomorphisme de F induit par u.
2. La méthode de rédaction pour montrer qu'un sev est stable par $u \in \mathscr{L}(E)$.
3. **Si f et g sont deux endomorphismes qui commutent, alors**
   (a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ker(f - \lambda Id)$ **(resp :** $\ker(g - \lambda Id)$**) est stable par g (resp : par f)**
   (b) Le noyau et L'image de l'un sont stables par l'autre.

1.6 Trace

Savoirs attendus :

1. Définition d'une matrice carrée et d'un endomorphisme.
2. **L'application Tr est une forme linéaire non nulle,** $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA}), \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}({}^t\mathbf{A})$**, deux matrices semblables ont même trace**.
3. **Si p est un projecteur,** $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$

1.7 Interpolation de Lagrange

Savoirs attendus :

1. Définition de la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associé à un $n+1$-uplet de scalaires deux à deux distincts.
2. **Cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et coordonnées d'un polynôme P dans cette base**.

1.8 Exercice à connaître

Vous devez savoir démontrer $\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathscr{S}_n$ désigne le sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n$, celui des matrices antisymétriques.