Programme de Colle $n°3$
P.S.I
Semaine du 28 Septembre 2020

Au cours de la Colle, devra obligatoirement apparaître une question de cours qui peut être :
- *tout énoncé d'une définition ou d'une propriété.*
- *toute démonstration d'un point écrit en gras sur le programme de colle.*

Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D. Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure strictement à 10.
A la suite de votre Colle, sans tarder, vous rédigerez sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur. Le cahier est à me rendre avant le mardi suivant votre colle.

Bonne et Joyeuse Année de Khôlle !!!

1 Compléments d'algèbre linéaire

1. Produit d'espaces vectoriels : définition, dimension d'un produit de sev de dimension finie.
2. Matrice par blocs, produit de telles matrices.
3. Caractérisation du rang d'une application linéaire par une matrice par bloc : Soit E et F deux $\mathbb{K}$.e.v de dimension finie. On note $p = \dim E$ et $n = \dim F$.
   Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. rg (f)=r $\Longleftrightarrow$ il existe une base de E et une base de F dans lesquelles la matrice de f est $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$ et savoir traduire cette propriété matriciellement.
4. Matrices semblables : définition, interprétation à l'aide d'un endomorphisme, **Deux matrices semblables ont même déterminant et même rang mais la réciproque est fausse**.
5. Sous espaces stables : définition, exemples, **Si f et g sont deux endomorphismes qui commutent, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, Ker $(f - \lambda\, Id_E)$ et Im f est stable par g.**
6. Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme : définition, $\mathrm{tr}\,(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{BA})$, **Pour un projecteur p, $rg(p) = \mathbf{tr}\,(p)$**
7. **Déterminant de Vandermonde**

2 Séries Numériques

1. définition d'une série, série convergente, divergente : exemples (**série géométrique, harmonique, harmonique alternée), condition nécessaire de convergence**, série divergente grossièrement. Espace vectoriel des séries numériques, sous espace vectoriel des séries convergentes, cas des séries à termes complexes.
2. Relations entre suites et séries (ie cas des séries télescopiques puis comment on peut ramener l'étude d'une suite à une étude de série).
3. Cas particulier des séries de réels à termes positif :
   (a) $\sum u_n$ cv $\Longleftrightarrow (S_n)_n$ est majorée .
   (b) Théorème de comparaison entre série et intégrale.(sans parler d'intégrale généralisée) (dans cette démo, on voit l'encadrement d'une somme partielle par des intégrales)

(c) **application aux séries de Riemann et aux séries du type** $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln(n)^{\beta}}, \beta\in\mathbb{R}$

(d) Théorème de comparaison , utilisation de o, O , de l'équivalent. **Application aux séries du type** $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^{\alpha}\ln(n)^{\beta}}, (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

4. Absolue-convergence : Définition, toute série absolument convergente est convergente.