Colle de **mathématiques**

ATTENTION : *Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.*
• ***Comment préparer une colle ?*** *: Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.*
• ***Notation*** *: Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8. Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.*
• ***Après la colle*** *: Je vous demande de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.Je récupèrerai les cahiers de colle le mardi de la semaine suivante à votre colle*
N'hésitez pas à venir me poser des questions*. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle, d'enrichir vos TD d'exercices supplémentaires que vous pourrez revoir avant vos devoirs surveillés, pendant les devoirs maison, avant les concours*

Les acquis indispensables :

1. *savoir montrer qu'un ensemble est un sev d'un ev, montrer qu'une application est linéaire, est un endomorphisme, est un isomorphisme, est un automorphisme, déterminer une base et la dimension d'un sev. (cf devoir surveillé n°2)*
2. *calcul du rang, d'un déterminant, d'un calcul matriciel par blocs (refaire des calculs déjà vus : exemples cours, feuille de TD, Devoir Surveillé n°2)*

1 Compléments d'algèbre linéaire

1. Polynômes de Lagrange associés à un (n+1)-uplet de scalaires 2 à 2 distincts : **Définition, la famille forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$, coordonnées d'un polynôme dans cette base. Étant donné un (n+1)-uplet de scalaires $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$, trouver le polynôme tel que $\forall i, P(a_i) = \lambda_i$.**
2. Matrice et Déterminant de Vandermonde : Définitions, interprétation à l'aide des polys de Lagrange, **Expression factorisée du déterminant**.

2 Séries numériques

1. Bien faire la différence de notations entre une série, une somme partielle, la suite des termes généraux, la somme de la série.
2. Définition de la convergence ou divergence.
3. **Nature et somme des Séries géométriques, Divergence de la Série Harmonique, Nature et somme de la série harmonique alternée**, séries exponentielles.
4. Déterminer la nature d'une série et calcul éventuel de la somme dans les cas où on peut calculer la somme partielle (utilisation éventuelle d'une décomposition en éléments simples), ou en se référant aux séries précédemment citées.
5. Premières propriétés : condition nécessaire de convergence, structure d'espace vectoriel de l'espace des séries convergentes, caractérisation des séries de complexes à l'aide des séries des parties réelles et imaginaires.
6. Les séries de réels à termes positifs : convergence par majoration de la suite des sommes partielles,**critère de Riemann**, technique de l'encadrement à l'aide de la méthode des rectangles des séries de termes f(n) où f est décroissante(savoir refaire), théorème de comparaison, critères du o(), O(), équivalent.
7. Séries de Bertrand : les techniques ont été vues mais tout doit être refait .
8. Relation entre séries et suites :**Séries télescopiques. Étude d'une suite $(u_n)_n$ en étudiant la série de terme général $u_{n+1} - u_n$**
9. Absolue Convergence.
10. Technique de comparaison série et intégrale : *Intitulé du programme : Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et divergences de séries du type $\sum f(n)$, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas de fonction f monotone. (Le cas le plus couramment rencontré est le suivant : Soit f une application de $[a, +\infty[(a \in \mathbb{R}^+)$, continue, positive et décroissante).*
11. Les compléments de PSI :
    (a) Règle de D'Alembert.
    (b) Produit de Cauchy de deux séries.
    (c) Série Exponentielle complexe : **définition, $\mathbf{e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}}$** Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du type $e^z = a, a \in \mathbb{C}$.
    (d) Séries alternées : **Démonstration du critère spécial des séries alternées**, signe et majoration de la somme et des restes, **méthode pour étudier une série alternée lorsque les hypothèses du CSSA ne sont pas vérifiées : faire un développement limité**.
    (e) Formule de Stirling :**re-proposer en exercice suivant la démonstration :**
        i. Montrer que la suite $(n!e^n n^{-n-\frac{1}{2}})_n$ converge vers un réel $l > 0$.
        ii. On définit $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.
            A. Montrer que $\forall n \geq 2, I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.
            B. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ (technique de Wallis).
            C. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
            D. En déduire $I_n \sim I_{n-1}$.
            E. Montrer que $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.
            F. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
            G. En déduire que $l = \sqrt{2\pi}$.