Colle de **mathématiques**

ATTENTION : *Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.*

• ***Comment préparer une colle ?*** *: Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.*

• ***Notation*** *: Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8. Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.*

• ***Après la colle*** *: Je vous demande de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.Je récupèrerai les cahiers de colle le mardi de la semaine suivante à votre colle*

N'hésitez pas à venir me poser des questions*. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle, d'enrichir vos TD d'exercices supplémentaires que vous pourrez revoir avant vos devoirs surveillés, pendant les devoirs maison, avant les concours*

1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Cf programme semaine dernière.
Ce sera exclusivement des exercices travaillant sur l'espace des polynômes.

2 Intégrales impropres

1. Définition des fonctions continues par morceaux sur un intervalle et intégration de ces fonctions
2. Définition des intégrales impropres convergentes et divergentes
3. *Méthode à retenir : Comment justifier l'existence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$:*
   (a) *On commence par se poser la question : f est-elle continue sur $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$, $]a,b]$?*
   (b) *Si a et b sont réels et f continue sur $[a,b]$, alors on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ existe en tant qu' intégrale d'une fonction continue sur un segment.*
   (c) *Dans le cas où f continue sur $[a,b[$ ou $]a,b]$ et a et b sont réels : on étudie la limite de f en la borne impropre.*
      i. *Si cette limite est réelle, alors on dit que f se prolonge par continuité en cette borne impropre et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ existe en tant qu'intégrale de son prolongement par continuité sur un segment.*
      ii. *Si cette limite n'existe pas (cas de sin ou cos) ou qu'elle est infinie, on se trouve en présence d'une intégrale impropre (ou généralisée) :*
         A. *Si on sait calculer $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (si b est la borne impropre) ou $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ (si a est la borne impropre), alors on utilise la définition 3 pour savoir si l'intégrale est convergente ou non.*
         B. *Sinon on utilisera les critères de ce chapitre pour savoir si elle est convergente (et donc existe) ou divergente (et donc n'existe pas).*
   (d) *Dans le cas où a ou b est $\pm\infty$, c'est une intégrale impropre (ou généralisée) :*
      i. *Si on sait calculer $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (si $b=+\infty$ est la borne impropre) ou $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ (si $a=-\infty$ est la borne impropre), alors on utilise la définition 3 pour savoir si l'intégrale est convergente ou non.*
      ii. *Sinon on utilisera les critères de ce chapitre pour savoir si elle est convergente (et donc existe) ou divergente (et donc n'existe pas).*

   On n'étudie qu'une borne impropre à la fois : dans le cas où les deux bornes sont impropres, utiliser Chasles et étudier deux intégrales impropres
4. Les exemples fondamentaux : **intégrales de Riemann,** $\boldsymbol{\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t}$, $\boldsymbol{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t}$
5. Intégrales impropres de fonctions positives : **Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$, à valeurs positives. $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente $\iff F: x\longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée (***savoir citer le théorème de la limite monotone***)**, théorèmes de comparaison, critères de o(), O(), équivalence.
6. Fonction d'intégrale nulle.
7. Comparaison Série / Intégrale.
8. Méthodes de calcul : Primitivation, Intégration par partie, Changement de variable.
9. Intégrabilité sur un intervalle quelconque : définition d'une fonction intégrable sur un intervalle, d'une intégrale absolument convergente, **savoir montrer que** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t} deux-\text{à}-deuxt$ **converge et** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t} deux-\text{à}-deuxt$ **diverge**.