Colle de **mathématiques**

On fera bien la distinction entre énoncer et démontrer.

1 Intégration sur un intervalle quelconque

Savoirs attendus :

1. Introduction :
   (a) Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment, sur un intervalle.
   (b) Calcul d'une intégrale continue par morceaux sur un segment.
   (c) Connaître le théorème fondamental de l'intégration vu en PCSI, et savoir qu'il n'est pas applicable pour une fonction continue par morceaux sur un intervalle.
2. Définition d'une intégrale convergente pour une fonction continue par morceaux sur $[a, b[,]a, b],]a, b[$. Relation de Chasles
3. Plan d'étude d'une intégrale dont on demande la nature : *Comment justifier l'existence de* $\int_a^b f(t)\,dt$ *:*
   (a) On commence par se poser la question : f est-elle continue sur $[a, b]$, $[a, b[,]a, b[,]a, b]$?
   (b) Si a et b sont réels et f continue sur $[a, b]$, alors on dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
   (c) Dans le cas où f continue sur $[a, b[$ ou $]a, b]$ et a et b sont réels : on étudie la limite de f en la borne impropre.
      i. Si cette limite est réelle, alors on dit que f se prolonge par continuité en cette borne impropre et $\int_a^b f(t)\,dt$ existe en tant qu'intégrale de son prolongement par continuité sur un segment.
      ii. Si cette limite n'existe pas (cas de sin ou cos) ou qu'elle est infinie, on se trouve en présence d'une intégrale impropre (ou généralisée) :
         A. Si on sait calculer $\int_a^x f(t)deux-\text{à}-deuxt$ (si b est la borne impropre) ou $\int_x^b f(t)deux-\text{à}-deuxt$ (si a est la borne impropre), alors on utilise la définition 3 pour savoir si l'intégrale est convergente ou non.
         B. Sinon on utilisera les critères de ce chapitre pour savoir si elle est convergente (et donc existe) ou divergente (et donc n'existe pas).
   (d) Dans le cas où a ou b est $\pm\infty$, c'est une intégrale impropre (ou généralisée) :
      i. Si on sait calculer $\int_a^x f(t)deux-\text{à}-deuxt$ (si $b = +\infty$ est la borne impropre) ou $\int_x^b f(t)deux-\text{à}-deuxt$ (si $a = -\infty$ est la borne impropre), alors on utilise la définition 3 pour savoir si l'intégrale est convergente ou non.
      ii. Sinon on utilisera les critères de ce chapitre pour savoir si elle est convergente (et donc existe) ou divergente (et donc n'existe pas).
      iii. On n'étudie qu'une borne impropre à la fois : dans le cas où les deux bornes sont impropres, utiliser Chasles et étudier deux intégrales impropres

   .
4. **Exemples fondamentaux :savoir démontrer nature des intégrales de Riemann, intégrale de l'exp, du ln**.
5. **Savoir énoncer les critères pour les fonctions continues par morceaux à valeurs positives** :
   (a) Caractérisation théorique : Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs positives.
   $$\int_a^b f(t)\,dt \text{ est convergente } \iff F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt \text{ est majorée}$$
   (b) Théorème de comparaison : Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ et positives tel que :
   $$\exists c \in]a, b[, \forall x \in [c, b[, 0 \leq f(x) \leq g(x)$$
   1. Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
   2. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

   (c) Critère o, O : Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$, positives sur $[c, b[$, où $c \in]a, b[$.
   On suppose $f \underset{b}{=} O(g)$ ou $f \underset{b}{=} o(g)$.
   Alors
   a) Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
   b) Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

(d) Critère d'équivalence : On suppose $f \underset{b}{\sim} g$.

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ et } \int_a^b g(t)\,dt \text{ ont même nature.}$$

6. **Savoir démontrer la nature d'une intégrale de Bertrand**
7. Fonction d'intégrale nulle : **savoir énoncer le théorème** : Soit f continue, positive sur $[a, b[$ où $a < b$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge.

   Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.
   Savoir l'utiliser pour montrer qu'une application est un produit scalaire (exemple fait en cours).
8. Comparaison série-intégrale : **Savoir énoncer** :
   (a) Soit f continue par morceaux, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$.

   Alors $\displaystyle\sum_{n\geq\lfloor a\rfloor+1} f(n)$ est de même nature que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

   (b) Soit f continue par morceaux, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

   Alors

$$\sum_{n=\lfloor a\rfloor+1}^{N} f(n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_a^N f(t)\,dt$$

9. Méthodes de calcul :
   (a) Primitivation : on connaît une primitive F de f continue sur $[a, b[$ et alors $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^{t\to b} = \lim_{t\to b} -F(a)$.
   (b) Intégration par parties : Attention aux hypothèses.
   (c) Changement de variable : Bien adopter le plan suivant :
      i. On étudie la validité du changement de variable :
         A. si on fait $u = \varphi(t)$ dans $\int_I f$, on vérifie que φ est C^1 de I vers un intervalle J à déterminer.
         B. si on fait $t = \varphi(u)$ dans $\int_I f$, on vérifie que φ est C^1 d'un intervalle J à déterminer vers I
      ii. On procède au changement de variable en quatre étapes :
         A. on écrit la relation de changement de variable : $u = \varphi(t)$ ou $t = \varphi(u)$.
         B. on écrit la relation entre dt et du : $du = \varphi'(t)dt$ ou $dt = \varphi'(u)du$.
         C. on regarde les bornes en écrivant $t = \cdots \Longleftrightarrow u = \cdots$.
         D. on remplace dans l'intégrale : jamais on ne doit trouver une intégrale avec u et t à la fois.
10. Intégrabilité sur un intervalle quelconque :
   (a) définition d'une application intégrable sur I, intégrale absolument convergente.
   (b) Savoir que f intégrable sur $I \Longrightarrow \int_I f$ converge.
   (c) **Savoir démonter que** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$ **converge mais n'est pas absolument convergente**.
   (d) Savoir utiliser les critères pour les fonctions positives pour démontrer une absolue convergence.