Colle de **mathématiques**

ATTENTION : *Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices, un exercice d'algèbre et un exercice d'analyse. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.*

• ***Comment préparer une colle ?*** *: Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.*

• ***Notation*** *: Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure strictement à 10.*

• ***Après la colle*** *: Je vous conseille très fortement de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.*

N'hésitez pas à venir nous poser des questions*. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle.*

1 Algèbre

1.1 Formes linéaires et Hyperplan

1. Définition d'une forme linéaire. Une forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie est de la forme $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ où $(x_i)_i$ sont les coordonnées de x dans une base de E, toute forme linéaire sur E non nulle est surjective.
2. Définition d'un hyperplan en dimension quelconque, caractérisation en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle,
   méthode pour obtenir un supplémentaire à l'aide de cette forme(c'est-à-dire savoir démontrer que si $a \notin H = \ker(\varphi)$, (i.e $\varphi(a) \neq 0$), alors $\text{vect}(a) \oplus H = E$).
3. Cas où E est de dimension finie : caractérisation d'un hyperplan par la dimension, équation d'un hyperplan dans une base donnée de E.
4. Cas particulier des droites dans le plan et des plans dans l'espace.
5. **Deux hyperplans** $H_1 = \ker \varphi_1$ **,** $H_2 = \ker \varphi_2$ **sont égaux si et seulement si** φ_1 **et** φ_2 **sont liées.** Deux équations linéaires représentent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.

Savoir Faire : À l'issue de ce chapitre, vous devez savoir démontrer qu'un s.e.v. de E est un hyperplan, donner la forme linéaire dont il est le noyau, sa dimension et son équation quand E est de dimension finie et éventuellement une base.

1.2 Éléments propres

Définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée et d'un endomorphisme en dimension finie, valeur propre, vecteur propre, sous espace propre, spectre d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev (pas forcément en dimension finie) et d'une matrice carrée
Savoir Faire : Vous devez savoir déterminer toutes les notions précédentes pour une matrice ou un endo. donné

1.3 Démonstrations à connaître

- **Méthode pour obtenir un supplémentaire d'un hyperplan** *(voir précédemment)*
- **Deux hyperplans** $H_1 = \ker \varphi_1$ **,** $H_2 = \ker \varphi_2$ **sont égaux si et seulement si** φ_1 **et** φ_2
- **Définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée et d'un endomorphisme en dimension finie, valeur propre, vecteur propre, sous espace propre, spectre d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev (pas forcément en dimension finie) et d'une matrice carrée sont liées.**

2 Analyse

2.1 Intégrales généralisées

On continue d'interroger sur les intégrales généralisées...

2.2 Probabilités dans un espace probabilisé

- Ensembles dénombrables
- Tribu des événements, probabilité sur une tribu, σ-additivité, espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Propriétés
- Indépendance, probabilités conditionnelles

2.3 Démonstrations à connaître

- **Lois de Morgan**
- **Continuité monotone d'une probabilité** (voir plus loin)

2.4 Résultats

- **Lois de Morgan** (échange union $\leftrightarrow$ intersection par passage au complémentaire)
- Tout le vocabulaire classique utilisé en probabilités : événements, issues, système complet d'événements etc.

- **Continuité monotone d'une probabilité** : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
  1. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$),
     alors la suite $(\mathrm{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.
  2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$),
     alors la suite $(\mathrm{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.
- Sous-additivité d'une probabilité
- Indépendance : indépendance deux à deux et indépendance mutuelle. Indépendance et passage au complémentaire
- Probabilités conditionnelles : loi des probabilités composées, théorème des probabilités totales (version σ-additive) et théorème de Bayes.