

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
 - Le premier exercice doit contenir :
 - Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
 - Deux niveaux de démonstration : niveau (★) pour les groupes 2,3 et 5.
 - Une application très directe du cours :
 - Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.
- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8. Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.
- **Après la colle** : Avant le jeudi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Séries Numériques

Savoirs attendus :

1. Connaître les notations d'une série, d'une Nième somme partielle d'une série, de la somme d'une série.
2. la définition d'une série convergente (resp : divergente) au moyen de la suite des sommes partielles et définition de la somme d'une série convergente.
3. Cas des séries géométriques et de la série harmonique alternée.
4. Séries exponentielles réelles et séries de Riemann.
5. Savoir étudier la nature d'une série à termes positifs en utilisant l'un des critères suivants :
 - (a) Majoration de la suite des sommes partielles.
 - (b) Théorème de comparaison.
 - (c) Critère du $o()$ et $O()$; le coup du α en sachant revenir au critère du $o()$.
 - (d) Critère de l'équivalent.
6. Les séries de Bertrand : La nature d'une série de Bertrand doit être rejustifiée à chaque fois (on utilise soit le théorème de comparaison, soit le critère du $o()$, soit la comparaison avec une intégrale).
7. Relation entre séries et suites :
 - Pour étudier la série $\sum u_n$, on peut étudier la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ et parfois transformer celles-ci grâce à un télescopage, qui permet une simplification de S_n et d'aboutir à sa convergence ou divergence et calcul de la somme de la série en cas de convergence.
 - Pour étudier une suite $(u_n)_n$, il est parfois utile d'étudier la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$. La suite $(u_n)_n$ correspond à une constante près à la suite des sommes partielles de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$.
8. Absolue Convergence : connaître la définition, les propriétés : $cv \Leftrightarrow \text{abs } cv$ et la généralisation des critères O et O.
9. Technique de comparaison série et intégrale : Dans le programme, il est écrit : *Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas de fonction monotone.*
10. Règle de D'Alembert.
11. Produit de Cauchy : connaître la définition du terme général du produit de Cauchy de deux séries et la propriété concernant le produit de somme de séries abs cv.
12. Application aux séries exponentielles. **Savoir démontrer que** $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
13. Séries alternées : apprendre les méthodes pour reconnaître une séries alternée, savoir appliquer le CSSA et le signe et la majoration du reste, savoir utiliser le développement limité quand $n \rightarrow +\infty$ du terme général lorsqu'il est difficile de montrer la décroissance de $(|u_n|)_n$ ou que $u_n = (-1)^n a_n$ et a_n contient du $(-1)^n$.
14. Formule de Stirling : **connaître bien sûr la formule.**

Suite page suivante.....

2 Exercices à savoir refaire

- Exercice 1.**
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge où $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.
 2. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$.
 3. En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 2. Pour $\alpha > 1$, donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3. Pour $x \in]-1, 1[$, écrire $\frac{1}{(1-x)^2}$ comme somme d'une série.

- Exercice 4.**
1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, donner la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
 2. Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}\sqrt{n}}$.
 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$ est une série alternée et donner sa nature.

Exercice 5. Les Intégrales de Wallis : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$. On a alors

1. $(I_n)_n$ est décroissante.
2. $\forall n, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
3. $\forall n, I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$. (On a appris la technique de Wallis)
4. $\forall n, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
5. $I_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$

Exercice 6. Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, donner la nature de $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n$.