classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°22$ du 30 Mars 2026**

CETTE SEMAINE, pour la dernière colle avant la préparation à l'écrit,la colle aura le FORMAT SUIVANT :

1. Une question de cours qui comportera :
   (a) Un énoncé (ou démo pour $(\star)$) sur les espaces préhilbertiens réels ou euclidien.
   (b) Un énoncé (ou démo pour $(\star)$) sur les endomorphismes particuliers d'un espace euclidien.
2. Un exercice court sur les endomorphismes particuliers d'un espace euclidien.
3. Un exercice sur les révisions sur les équations différentielles vue en PCSI.

Démo $(\star)$ pour le groupe 5, Raphaël-Ange du groupe 2, Pacôme du groupe 7 et Marguerite du groupe 1.

1 Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens

Dans ce chapitre , vous devez savoir :

1. Comment montrer qu'une application est un produit scalaire,l' inégalité de Cauchy Schwarz, cas de l'égalité, la définition de la norme associée, **les identités de polarisation**.
2. Exemples de référence :**produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur un espace de dimension fini, produit scalaire $< A, B > \mapsto$ tr $(A^T B)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produits scalaires définis par une intégrale sur** $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
3. définition de vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, orthonormale, vecteur orthogonal à un sev, orthogonal d'un sev.
4. Caractérisation de l'orthogonal d'un sev dans le cas où celui-ci est de dimension finie **(à connaître absolument)**.
5. Théorème de Pythagore.
6. **Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (démo $(\star)$)**. Définition d'une b.o.n. **Expression des coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n, d'un produit scalaire, de la norme (finalement dans un espace euclidien dans une b.o.n , le produit scalaire et la norme ont les mêmes expressions que le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$)**
7. Supplémentaire orthogonaux : définition, Tout sev d'un espace euclidien admet un supplémentaire orthogonal, existence de b.o.n dans un euclidien, tout sev de dim finie dans un préhilbertien admet un supplémentaire orthogonal.
8. Projecteur orthogonal sur un sev de dim finie dans un préhilbertien : définition . **Connaître l' Expression de $P_F(x)$ quand on connaît une b.o.n de F** .
9. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**à savoir appliquer**.
10. Distance d'un vecteur à un sev : **définition et expression dans le cas où F est de dimension finie**.
11. Formes linéaires sur un espace euclidien :**Enoncé** du Théorème de représentation des formes linéaires : En dimension finie, toute forme linéaire est représentée par un produit scalaire. (**sa démo pour groupes $\star$**).

2 Isométries vectorielles et Endomorphismes autoadjoints

Dans ce chapitre , vous devez savoir :

1. **Définition d'une isométrie vectorielle par la conservation de la norme**
2. **un endo f est isométrie vectorielle si et seulement si elle conserve le produit scalaire (démo pour groupes $\star$)**.
3. **qu'une isométrie vectorielle est un automorphisme, l'application réciproque d'une isométrie vectorielle est une isométrie vectorielle, stabilité par la composée, son spectre est inclus dans** $\{-1, 1\}$
4. définition d'une matrice orthogonale, les deux méthodes principales pour montrer qu'une matrice est orthogonale, lien avec les isométries vectorielles, déterminant d'une matrice orthogonale, CNS pour qu'une matrice de passage soit orthogonale, inverse d'une matrice orthogonale.
5. Définition du groupe orthogonal et sous groupe spécial orthogonale.
6. Les deux natures possibles pour une isométrie vectorielle en dim 2 : rotation d'angle θ et réflexion s de droite Ker $(s - Id)$.
7. Définition du produit mixte et produit vectoriel en dim 3.
8. Savoir reconnaître une rotation et une réflexion en dim 3 et donner leurs éléments caractéristiques.
9. **Définition d'un endomorphisme autoadjoint**.
10. Savoir montrer qu'un endomorphisme est autoadjoint (soit par le produit scalaire, soit par sa matrice dans une b.o.n)
11. **Savoir énoncer le théorème spectral**.
12. Savoir définir un endomorphisme u autoadjoint positif (resp : défini positif) et le lien avec le spectre.**(démo pour groupes $\star$)**.

3 Équations différentielles vues en PCSI

Dans ce chapitre , vous devez savoir :

1. résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
2. citer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 1.
3. résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre sous la forme polynôme multiplié par une exponentielle ou polynôme en cos-sin multiplié par une exponentielle.