Colle de **mathématiques**

ATTENTION : *Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices, un exercice d'algèbre et un exercice d'analyse. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.*

• ***Comment préparer une colle ?*** *: Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.*

• ***Notation*** *: Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure strictement à 10.*

• ***Après la colle*** *: Je vous conseille très fortement de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.*

N'hésitez pas à venir nous poser des questions*. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle.*

1 Algèbre

1.1 Correction du DS nº 2, sujet nº 1

Vous serez interrogé sur un des points de ce DS.

1.2 Formes linéaires et hyperplans

- Définition d'une forme linéaire.
- Définition d'un hyperplan en dimension quelconque, caractérisation en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle.

1.3 Démonstrations à connaître

- **Déterminant de Vandermonde.**
- **Méthode pour obtenir un supplémentaire d'un hyperplan** *(voir ci-dessous)*

1.4 Résultats

- Définition d'une forme linéaire : *Une forme linéaire f sur un espace vectoriel E de dimension finie n est de la forme $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ où $(x_i)_i$ sont les coordonnées de x dans une base de E, toute forme linéaire sur E non nulle est surjective.*
- Définition d'un hyperplan en dimension quelconque, caractérisation en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle,
  Méthode pour obtenir un supplémentaire d'un hyperplan H à l'aide de cette forme linéaire (c'est-à-dire savoir démontrer que si $a \notin H = \ker(\varphi)$, (i.e. $\varphi(a) \neq 0$), alors $\mathrm{vect}(a) \oplus H = E$).

2 Analyse

Comment la convergence uniforme n'est pas bien maîtrisée, vous pouvez encore être interrogés sur le chapitre « suites et séries de fonctions »

2.1 Suites & séries de fonctions

- Convergence simple de suites et de séries
- Convergence uniforme de suites de fonctions et de séries.
- Préservation de la continuité pour la convergence uniforme.
- Convergence uniforme et permutation de limites, intégration et dérivation

2.2 Intégrales définies sur un intervalle quelconque

- Fonctions continues par morceaux
- Intégrales impropres : définition et exemples. Nature de telles intégrales.
- Nature d'une intégrale généralisée d'une fonction positive continue par morceaux sur un intervalle I quelconque.
- Calcul d'intégrales généralisées par primitivation (dans le cas de fonctions continues), par intégration par parties, par changement de variable bijectif de classe $\mathcal{C}^1$

2.3 Démonstrations à connaître

- **Intégration par parties. Énoncé du théorème et sa démonstration.**
- Soit f une fonction **continue positive** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est constamment nulle sur I.

2.4 Résultats

- Les principaux résultats du chapitre sur les suites et séries de fonctions *(convergence uniforme, normale etc.)*
- **Intégration sur un segment & suite de fonctions continues uniformément convergentes**

- Fonctions continues par morceaux
- **Nature des intégrales généralisées** : Cas d'une fonction positive : comparaison, notamment, via un « petit o » ou un « grand O », ou l'usage d'équivalents ; comparaison avec une série
- Primitivation, intégration par parties, changement de variable bijectif.
- Fonctions intégrables/convergence absolue d'une intégrale généralisée.
- Soit f une fonction **continue positive** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est constamment nulle sur I.