PSI **Septembre 2020**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ et $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{p} a_i X^i \in \mathbb{K}_p[X]$. Soit $P(B) = \sum\limits_{i=0}^{p} a_i B^i$.
Montrer que $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & A^2 P'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.

Exercice 2. D'après Ecole Navale
Soit $(A, B, C, D) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^4$. On définit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$.
On suppose que ${}^tMJM = J$. Montrer que A et D sont inversibles.

Exercice 3. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / MJ_r = 0\}$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r. On pose $\Delta_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), AMA = 0_n\}$.
   Montrer que Δ_A est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie dont on donnera la dimension et une base.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A^2 = A$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant

$$u^3 + u = 0$$

1. Montrer que $\operatorname{Im} u$ est stable par u
2. Pour $x \in \operatorname{Im} u$, calculer $u^2(x)$
3. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$. Montrer que v est un isomorphisme. Que vaut v^{-1} ?
4. En déduire que le rang de u est un entier pair.

Exercice 6. Prouver qu'il existe un seul endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $\operatorname{Ker} u$ est engendré par $X^2 - 1$ et $X^2 + 1$ et tel que $u(X) = 2X$. Quelle est sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? Quels sous-espaces stables apparaissent dans cette écriture matricielle ?

Exercice 7. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie. On suppose que $f^3 + f^2 + f = 0_{\mathscr{L}(E)}$

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
2. Justifier que $F = \operatorname{Im}(f)$ est stable par f.
3. Montrer que l'endomorphisme g de F induit par f est un automorphisme de F.

Exercice 8. On pose $\Delta_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), M + {}^tM = \operatorname{tr}(M)A\}$, S_n l'espace des matrices symétriques et A_n celui des matrices antisymétriques.

1. Montrer que Δ_A est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que $A_n \subset \Delta_A$.
2. Si $\operatorname{tr}(A) \neq 2$, montrer que $\Delta_A = A_n$.
3. Si $\operatorname{tr}(A) = 2$ et $A \notin S_n$, déterminer Δ_A.

4. Si $\mathrm{tr}\,(A) = 2$ et $A \in S_n$, déterminer Δ_A.

Exercice 9. Soient Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et B^2
2. A et B sont-elles semblables ?

Exercice 10. Montrer que, f, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$ est un endomorphisme et donner sa trace.

Exercice 11. CCP 17 Soit u et v deux endomorphismes d'un espace de dimension finie tels que : $u \circ v - v \circ u = u$.
Montrer, en raisonnant par l'absurde, que u n'est pas bijectif.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que si $rg(A) = 1$, alors $A^2 = Tr(A)A$.

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Calculer AE_{ij} et $E_{i,j}A$ pour $(i, j) \in [1, n]^2$.
2. Calculer la trace de l'endomorphisme f donné par : $f(M) = AM + MA$

Exercice 14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 3A \\ 2A & 4A \end{pmatrix}$.
Exprimer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice 15. Soient $n \in \mathbb{N}^*, (A, B, C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^3, D \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$.

1. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est inversible ssi $AD - BC$ l'est.
3. Calculer

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{vmatrix}$$

Exercice 16. (CCP)

Calculer, pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$.

Exercice 17. Soient P un polynôme de degré n et $(a_0, \cdots, a_n)$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que $(P(X + a_i))_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 18. (extrait écrit Centrale) Soit $n \in \mathbb{N}^*, (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Justifier que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit : $M = M_1 + iM_2$ avec $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
2. Justifier l'existence de deux matrices U et V à coefficients réels telles que $U + iV \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(U + iV)A = B(U + iV)$.
3. Montrer que l'application $\lambda \longmapsto det(U + \lambda V)$ est un polynôme non nul sur $\mathbb{C}$.
4. En déduire l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + \lambda_0 V \in GL_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.