PSI **Septembre 2021**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soient $(E, F, G$ trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie, $(f, g, h) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(G, F) \times \mathscr{L}(E, G)$ tels que $f = g \circ h$.
Montrer que :
1. Si h est bijective, alors $rg(f) = rg(g)$.
2. Si g est bijective, alors $rg(f) = rg(h)$.
3. Traduire une propriété équivalente pour des matrices.

Exercice 2. Prouver qu'il existe un seul endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $\operatorname{Ker} u$ est engendré par $X^2 - 1$ et $X^2 + 1$ et tel que $u(X) = 2X$. Quelle est sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? Quels sous-espaces stables apparaissent dans cette écriture matricielle ?

Exercice 3. (partie de CCINP PSI 2021) On considère une matrice C de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.$\overline{C}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coeffs de C. En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, montrer que :

$$det(I_n + C\overline{C}) = det \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$$

Exercice 4. (partie de CCINP PSI 2021)

1. Soient $(r, s, t, u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base $(e_1; e_2)$ est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base (e_2, e_1).
2. Soit $(R, S, T, U) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$

Exercice 5. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie. On suppose que $f^3 + f^2 + f = 0_{\mathscr{L}(E)}$

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
2. Justifier que $F = \operatorname{Im}(f)$ est stable par f.
3. Montrer que l'endomorphisme g de F induit par f est un automorphisme de F.

Exercice 6. Parmi les matrices suivantes, donner celles qui sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Montrer que, f, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$ est un endomorphisme et donner sa trace.

Exercice 8. CCP 17 Soit u et v deux endomorphismes d'un espace de dimension finie tels que : $u \circ v - v \circ u = u$. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que u n'est pas bijectif.

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que si $rg(A) = 1$, alors $A^2 = Tr(A)A$.

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Calculer AE_{ij} et $E_{i,j}A$ pour $(i,j) \in [1,n]^2$.
2. Dans cette question $n = 2$. Calculer la trace de l'endomorphisme f donné par : $f(M) = AM + MA$
3. de même pour n quelconque

Exercice 11. Pour $n > 0$, on note D_n l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que D_n est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser une base et sa dimension.
2. Soit $A \in D_n$ telle que $i \neq j \Longrightarrow a_{ii} \neq a_{jj}$. Prouver que $(I_n, A, A^2, \cdots, A^n)$ est une base de D_n.
3. Prouver que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec A, alors $B \in D_n$.

Exercice 12. (CCP)

Calculer, pour $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 13. Soient P un polynôme de degré n et $(a_0, \cdots, a_n)$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que $(P(X + a_i))_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 14. (extrait écrit Centrale) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Justifier que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit : $M = M_1 + iM_2$ avec $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
2. Justifier l'existence de deux matrices U et V à coefficients réels telles que $U + iV \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(U + iV)A = B(U + iV)$.
3. Montrer que l'application $\lambda \longmapsto det(U + \lambda V)$ est un polynôme non nul sur $\mathbb{C}$.
4. En déduire l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + \lambda_0 V \in GL_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.