classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES
Septembre 2025

Feuille d'Exercices $n°2$
Compléments d'algèbre linéaire

1 Les applications assez directes du cours

Exercice 1. (partie d'écrit CCINP PSI 2021) On considère une matrice C de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.$\overline{C}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coeffs de C. En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, montrer que :

$$det(I_n + C\overline{C}) = det\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$$

Exercice 2. (partie d'écrit CCINP PSI 2021)

1. Soient $(r, s, t, u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base $(e_1; e_2)$ est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base (e_2, e_1).
2. Soit $(R, S, T, U) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$

Exercice 3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie. On suppose que $f^3 + f^2 + f = 0_{\mathscr{L}(E)}$

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
2. Justifier que $F = \operatorname{Im}(f)$ est stable par f.
3. Montrer que l'endomorphisme g de F induit par f est un automorphisme de F.

Exercice 4. Soit $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ non nulle telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$

1. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.
2. montrer que $p \leqslant 4$.
3. On suppose $p = 4$. , montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Parmi les matrices suivantes, donner celles qui sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que si $rg(A) = 1$, alors $A^2 = Tr(A)A$.

Exercice 7. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit le produit tensoriel de A et B, comme la matrice notée $A \oplus B$, définie par :

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

Quelle est la taille de $A \oplus B$? Montrer que $\operatorname{tr}(A \oplus B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

Exercice 8. Montrer que, f, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$ est un endomorphisme et donner sa trace.

Exercice 9. Déterminant et trace de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : \varphi : M \mapsto \text{tr}\,(M)I_n + M$

Exercice 10. Pour $n \geqslant 2$, et $(E) : M +^t M = 2(trM)In$,avec $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des solutions de E (muni des opérations usuelles) est un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Exercice 11. 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}\,(A^T A) = 0$. Montrer que $A = 0$.

2. Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ telle que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}\,(AM) = \text{tr}\,(BM)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Calculer AE_{ij} et $E_{i,j}A$ pour $(i, j) \in [1, n]^2$.
2. Dans cette question $n = 2$. Calculer la trace de l'endomorphisme f donné par : $f(M) = AM + MA$
3. de même pour n quelconque

Exercice 13. 1. Calculer le polynôme de degré 2 qui interpole aux points ą $(-1, 4), (2, 4), (3, 8)$.

2. En déduire tous les polynômes qui « passent »par ces 3 points.

Exercice 14. (CCINP 24 sans préparation)

1. Cours : Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.
2. Pour tout k entier entre 1 et n, on pose $f_k(x) = e^{kx}$. Montrer que la famille $(\ f_1, f_2, \cdots, f_n\ )$ est libre.
3. Montrer sans les calculer que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$, que l'on notera α, β, γ.
4. Résoudre le système suivant, composé de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ \alpha x + \beta y +, \gamma z & = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y +, \gamma^2 z & = 0 \end{cases}$$

Exercice 15. Pour $n > 0$, on note D_n l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que D_n est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser une base et sa dimension.
2. Soit $A \in D_n$ telle que $i \neq j \Longrightarrow a_{ii} \neq a_{jj}$. Prouver que $(I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$ est une base de D_n.
3. Prouver que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec A, alors $B \in D_n$.

2 Plus difficile

Exercice 16. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < r \leqslant n$.

1. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / MJ_r = 0\}$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Dans cette question $n = 3$ et $r < 3$. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension.
   (b) Même question pour n quelconque
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r. On pose $\Delta_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), MA = 0_n\}$.
   (a) Montrer que Δ_A est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Justifier qu'il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $A = PJ_rQ$.
   (c) Montrer que $M \in \Delta_A \Longleftrightarrow MP \in E$.
   (d) Construire un isomorphisme de E dans Δ_A et en déduire dimension et base de Δ_A.

Exercice 17. Oral CCINP 17 Soit u et v deux endomorphismes d'un espace de dimension finie tels que : $u \circ v - v \circ u = u$. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que u n'est pas bijectif.

Exercice 18. (Oral CCINP)

Calculer, pour $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 19. 1. Soient $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ des réels distincts deux à deux et $f : T \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto (T(\lambda_1^3), \cdots, T(\lambda_n^3)) \in \mathbb{R}_n$. Montrer que f est un isomorphisme.

2. Expliciter T^{-1} (on pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange)

Exercice 20. (Oral Mines Telecom)
Soit P un polynôme et des réels $(x_1, \cdots, x_n)$ n réels deux à deux distincts.
Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange de P aux nœuds $((x_i, P(x_i))_{1\leq i\leq n}$ est le reste de la division euclidienne de P par $\prod\limits_{i=1}^{n} (X - x_i)$.

Exercice 21. (extrait écrit Centrale) Soit $n \in \mathbb{N}^*, (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Justifier que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit : $M = M_1 + iM_2$ avec $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
2. Justifier l'existence de deux matrices U et V à coefficients réels telles que $U + iV \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(U + iV)A = B(U + iV)$.
3. Montrer que l'application $\lambda \longmapsto det(U + \lambda V)$ est un polynôme non nul sur $\mathbb{C}$.
4. En déduire l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + \lambda_0 V \in GL_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.