Devoir Surveillé $n°2$
PSI
MATHEMATIQUES
Algèbre
Corrigé
Samedi 9 Octobre 2021
(Durée : 2 heures)

$\boxed{\textbf{SUJET } n°1}$

Exercice I

D'après E3A PC 2014
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

1. $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$ alors $A_0 = I_2$.
   $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ alors $A_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Par produit matriciel,
   $$A_\theta A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\varphi)\cos(\theta) + \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi)\cos(\theta) + \cos(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$
   . En utilisant les formules trigonométriques, on obtient $\forall(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2, A_\theta A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$.
3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, par la question précédente, on peut écrire $A_\theta A_{-\theta} = A_0 = I_2$, ce qui montre que A_θ est inversible et $A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$.
4. Montrons d'une part par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (A_\theta)^k = A_{k\theta}$.
   - Pour $k = 0$, $(A_\theta)^0 = I_2 = A_0 = A_{0\theta}$.
   - Supposons vrai à un rang k.
     Alors $(A_\theta)^{k+1} = (A_\theta)^k A_\theta \overset{\text{par hyp. de récurrence}}{=} A_{k\theta}A_\theta \overset{\text{par Question 2}}{=} A_{(k+1)\theta}$.
     Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (A_\theta)^k = A_{k\theta}$.

   Soit k un entier relatif strictement négatif.
   Posons $k = -p$. Alors $p \in \mathbb{N}$ et $(A_\theta)^k = (A_\theta^{-1})^p \overset{\text{par Question 3}}{=} (A_{-\theta})^p \overset{\text{par ce qui précède}}{=} A_{-p\theta} = A_{k\theta}$.
   Conclusion : $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (A_\theta)^k = A_{k\theta}$.
5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a $A(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et par question précédente $(A_{\frac{\pi}{2p}})^p = A_{p\frac{\pi}{2p}} = A_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $M = A_{\frac{\pi}{2p}}$ vérifie $M^p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
6. D'une part, $\forall M \in E, f(M) \in E$ puis d'autre part,
   $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}) \in E^2$,

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda M_1 + \mu M_2) & = & f(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ \lambda c_1 + \mu c_2 & \lambda d_1 + \mu d_2 \end{pmatrix}) \\ & = & \begin{pmatrix} 2(\lambda a_1 + \mu a_2) & -(\lambda c_1 + \mu c_2) \\ \lambda b_1 + \mu b_2 & 3(\lambda d_1 + \mu d_2) \end{pmatrix} \\ & = & \lambda \begin{pmatrix} 2a_1 & -c_1 \\ b_1 & 3d_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2a_2 & -c_2 \\ b_2 & 3d_2 \end{pmatrix} \\ & = & \lambda f(M_1) + \mu f(M_2) \end{array}$$

Conclusion : f est un endomorphisme de E.
D'autre part,
$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$
$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{11} + 0E_{12} + 1E_{21} + 0E_{22}$
$f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{11} - E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$
$f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 3E_{22}$
On place ces vecteurs en colonne pour obtenir $Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Ce qui donne la matrice A demandée.

7. Soit $\mathcal{B}' = (E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{21})$. Il s'agit encore d'une base de E car c'est une base dont on a changé l'ordre des vecteurs.
   Dans cette base, la matrice de f devient A'. A et A' étant des matrices d'un même endomorphisme, elles sont semblables. Ainsi, il existe $P \in GL_4(\mathbb{R}), A' = P^{-1}AP$. P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Pour construire cette matrice, on met les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ en colonne. Ainsi
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. D'après la question précédente, $\mathcal{B}' = (E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{21})$.
   A' est une matrice diagonale par blos, alors par propriété des déterminants de matrices triangulaires par blocs,
   $det(f) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 * 3 * 1 = 6.$

9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^p = A'$. On note g l'endomorphisme associé à M dans la base $\mathcal{B}'$.
   (a) On a $Mat_{\mathcal{B}'}(g^p) = M^p = A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$, alors $g^p = f$.

(b)

$$\text{Ker}\,(f-2Id_E)=\{M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in E/(f-2Id_E)(M)=0\}$$
$$\text{Ker}\,(f-2Id_E)=\{M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\\ d\\ b\\ c\end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\in E/(A'-2I_4)\begin{pmatrix} a\\ d\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\}$$
$$\text{Ker}\,(f-2Id_E)=\{M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in E/d=0,-2b-c=0,b-c=0\}$$
$$\text{Ker}\,(f-2Id_E)=\{M=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in E/a\in\mathbb{R}\}$$
$$\text{Ker}\,(f-2Id_E)=\text{Vect}\,(E_{11})$$

$$\text{Ker}\,(f-3Id_E)=\{M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in E/(f-3Id_E)(M)=0\}$$
$$\text{Ker}\,(f-3Id_E)=\{M=aE_{11}+dE_{22}+bE_{12}+cE_{21}/(A'-3I_4)\begin{pmatrix} a\\ d\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\}$$
$$\text{Ker}\,(f-3Id_E)=\{M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in E/a=0,-3b-c=0,b-3c=0\}$$
$$\text{Ker}\,(f-3Id_E)=\{M=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\in E/d\in\mathbb{R}\}$$
$$\text{Ker}\,(f-3Id_E)=\text{Vect}\,(E_{22})$$

(c) – Soit $M\in\text{Ker}\,(f-2Id_E)$, montrons que $g(M)\in\text{Ker}\,(f-2Id_E)$:
$(f-2Id_E)(g(M))=f(g(M))-2g(M)=g^{p+1}(M)-2g(M)$ car $f=g^p$.
Or $M\in\text{Ker}\,(f-2Id_E)\Longrightarrow f(M)=2M\Longrightarrow g^p(M)=2M\Longrightarrow g^{p+1}(M)=2g(M)$ par composition par g. D'où $(f-2Id_E)(g(M))=g^{p+1}(M)-2g(M)=0$.
Conclusion : $g(M)\in\text{Ker}\,(f-2Id_E)$ et $\text{Ker}\,(f-2Id_E)$ est stable par g.

– Soit $M\in\text{Ker}\,(f-3Id_E)$, montrons que $g(M)\in\text{Ker}\,(f-3Id_E)$:
$(f-3Id_E)(g(M))=f(g(M))-3g(M)=g^{p+1}(M)-3g(M)$ car $f=g^p$.
Or $M\in\text{Ker}\,(f-3Id_E)\Longrightarrow f(M)=3M\Longrightarrow g^p(M)=2M\Longrightarrow g^{p+1}(M)=3g(M)$ par composition par g. D'où $(f-3Id_E)(g(M))=g^{p+1}(M)-3g(M)=0$.
Conclusion : $g(M)\in\text{Ker}\,(f-3Id_E)$ et $\text{Ker}\,(f-3Id_E)$ est stable par g.

(d) On a $M=Mat_{\mathcal{B}'}(g)$. Comme $E_1'\in\text{Ker}\,(f-2Id_E)$ et $\text{Ker}\,(f-2Id_E)$ est stable par g, alors $g(E_1')\in\text{Ker}\,(f-2Id_E)=vect(E_1')$ donc il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $g(E_1')=aE_1'$. Même raisonnement pour $g(E_2')$. Ceci se traduit que la première colonne de M est de la forme $\begin{pmatrix} a\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ et la deuxième colonne est de la forme $\begin{pmatrix} 0\\ b\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. On peut espérer avoir une solution M diagonale par bloc du type $M=\begin{pmatrix} D & O_{22}\\ O_{22} & M_1\end{pmatrix}$ où $D=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$.
Alors $M^p=A'\Longleftrightarrow a^p=2,b^p=3,M_1^p=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. On retrouve l'équation de la question

5. On en déduit que $M = \begin{pmatrix} \sqrt[p]{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[p]{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{2p}) & -\sin(\frac{\pi}{2p}) \\ 0 & 0 & \sin(\frac{\pi}{2p}) & \cos(\frac{\pi}{2p}) \end{pmatrix}$

10. On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$DM = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$ et $MD = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{pmatrix}$.
Ainsi $MD = DM \Longrightarrow b = c = 0 \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ où $(a, d) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$NM = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$ et $MN = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$.
Ainsi $MN = NM \Longrightarrow a = d, c = -b \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
D'après ce qui précède :
$DM = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$ et $MN = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$.
Ainsi $DM = MN \Longrightarrow 2a = b, 2b = -a, 3c = d, 3d = -c \Longrightarrow b = 2a, 5b = 0, d = 3c10c = 0 \Longrightarrow M = 0$

(d) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
D'après ce qui précède :
$MD = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{pmatrix}$ et $NM = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$.
Ainsi $MD = NM \Longrightarrow 2a = -c, 3b = -d, 2c = a, 3d = b \Longrightarrow c = -2a, 5a = 0, d = -3b10b = 0 \Longrightarrow M = 0$

(e) Posons $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ où $M_i \in E$ et on a $A' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$.
$A'M = \begin{pmatrix} DM_1 & DM_2 \\ NM_3 & NM_4 \end{pmatrix}$ et $MA' = \begin{pmatrix} M_1D & M_2N \\ M_3D & M_4N \end{pmatrix}$.
Par ce qui précède, on en déduit que $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$, $M_2 = M_3 = 0$ et $M_4 = \begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ -b_4 & a_4 \end{pmatrix}$ où $(a_4, b_4, a_1, b_1) \in \mathbb{R}^4$.

(f) Par ce qui précède, $C' = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & -b_4 & a_4 \end{pmatrix}, (a_4, b_4, c_4, d_4, a_1, b_1) \in \mathbb{R}^6\} = \text{Vect}\left(E_{11}, E_{22}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}\right)$. Ceci montre que C' est un sev de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de base $\left(E_{11}, E_{22}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}\right)$ de dimension 4.

(g) On pose $C = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) / AM = MA\}$

i. – $C \subset \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   – $O_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})} \in C$ donc $C \neq \emptyset$
   – $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (M, M') \in C^2$, $(\lambda M + \mu M')A = \lambda MA + \mu M'A = \lambda AM + \mu AM'$ car $(M, M') \in C^2$. Ainsi $(\lambda M + \mu M')A = A(\lambda M + \mu M')$ i.e $(\lambda M + \mu M')A \in C$ et C est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

ii. $M \in C' \iff MA' = A'M \iff MP^{-1}AP = P^{-1}APM \iff PMP^{-1}A = APMP^{-1}$.(On a multiplié par P^{-1} à droite et par P à gauche. On reconnaît la définition de $PMP^{-1} \in C$

iii. Montrons que φ est une application linéaire :
$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (M, M') \in C'^2, \varphi(\lambda M + \mu M') = P(\lambda M + \mu M')P^{-1} = \lambda PMP^{-1} + \mu PM'P^{-1} = \lambda \varphi(M) + \mu \varphi(M')$.
Ainsi, φ est une application linéaire de C' dans C par la question précédente. D'autre part, si on pose $\Psi : M \in C \mapsto P^{-1}MP$, alors Ψ va de C dans C' par la question précédente, puis $\varphi \circ \Psi = Id_C$ et $\Psi \circ \varphi = Id_{C'}$. Ceci montre que φ est bijective et $\varphi^{-1} = \Psi$.

iv. φ étant bijective et linéaire, elle envoie une base de C' en une base de C puisque $C = \mathrm{Im}\,(\varphi) = \mathrm{Vect}\,((\varphi(E_i))_{1 \leq i \leq 4})$ où $(E_i)_i$ désigne la base de C' déterminée en 10 f). Par bijectivité de φ, la liberté de $(E_i)_i$ implique la liberté de $(\varphi(E_i))_i$. Conclusion C est de dimension 4 et une base est : $(PE_{11}P^{-1}, PE_{22}P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1})$.

Exercice II

D'après E3A PSI 2005

1. Par définition de P_k, on peut dire $P_k(x_i) = 0$ si $k \neq i$ et $P_k(x_k) = 1$.

2. Supposons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = 0$. En prenant la valeur en x_j, on obtient $\alpha_j = 0$. La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est donc libre. Elle est, par ailleurs, constituée de polynômes de degré n et est donc une famille de $\mathbb{R}_n[X]$.Puis il s'agit d'une famille de $n+1$ polynômes qui est aussi la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.Maximale et libre, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.a. Si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe donc des scalaires α_k tels que $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$. La valeur en x_j donne $Q(x_j) = \alpha_j$. Ainsi,

$$Q = \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$$

3.b. Avec $Q_m = X^m$ $(m \in \{0, 1, \ldots, n\})$ on a donc

$$Q_m(0) = \sum_{k=0}^{n} x_k^m P_k(0)$$

et donc

$$s_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall m \in \{1, ..n\},\ s_m = 0$$

3.c. Par décomposition de X^j sur la base $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$, on a :

$$\forall j \in \{0, ..n\}, X^j = \sum_{k=0}^{n} x_k^j P_k$$

Ceci nous donne la matrice de passage de la base $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ vers la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice de Vandermonde associée au $n+1$ uplet $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$. Son déterminant est alors : $\prod\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$

4.a. Pour tout $j \in \{0, ..n\}$, on a $Q_1(x_j) = Q(x_j) - Q(x_j) = 0$ et Q_1 a donc au moins $n+1$ racines réelles (les x_j).Alors, il existe $R \in \mathbb{R}[X]$, $Q_1(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - x_k) R(X)$

4.b. i. Prenons $Q = X^{n+1}$ et donc $Q_1 = X^{n+1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k$. La valeur en $x = 0$ donne $s_{n+1} = -Q_1(0)$. Or, Q_1 est de degré $n+1$ et on en connaît $n+1$ racines. On peut le factoriser sous la forme

$$Q_1 = c \prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$$

où c est un réel qui est le coefficient dominant de Q_1. Comme les P_k sont de degré $n < n+1$, on a $c = 1$ et donc

$$s_{n+1} = -Q_1(0) = -\prod_{k=0}^{n} (-x_k) = (-1)^{n+2} \prod_{k=0}^{n} x_k = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} x_k$$

ii. On choisit cette fois $Q = X^{n+2}$. on a alors $s_{n+2} = -Q_1(0)$ avec

$$Q_1 = X^{n+2} - \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+2} P_k$$

Il existe cette fois des scalaires c et d tels que

$$Q_1 = (cX + d) \prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$$

En étudiant le coefficient de X^{n+2}, on obtient $c = 1$. En étudiant alors le coefficient de X^{n+1}, on obtient

$$0 = d - \sum_{k=0}^{n} x_k$$

On en déduit alors que

$$s_{n+2} = -Q_1(0) = -d \prod_{k=0}^{n} (-x_k) = (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \left(\prod_{k=0}^{n} x_k \right)$$