Autour des fonctions

1 Applications

1.1 Généralités, vocabulaire

Dans ce paragraphe, A, B et C désigneront des ensembles.

Définition
Une **application** de A vers B est un processus qui à tout élément de A associe un unique élément de B. On dit que A est l'**ensemble de départ**, que B est l'**ensemble d'arrivée** et, si l'appfication s'appelle f, on note : $f : A \to B$.

Exemples :

a) L'application qui, à tout élève de la classe de PCSI, associe sa couleur préférée :

b) La fonction f qui, à tout nombre réel strictement positif associe la somme de ce nombre et de son cosinus.

c) Si $B \subset A$, la **fonction indicatrice** de B est

d) Pour tout ensemble A, il existe une application particulière, l'**identité** notée Id_A et définie par :

Remarque : une **fonction** est une application entre des ensembles numériques. L'ensemble de départ est aussi appelé **domaine de définition**. Lorsque la fonction est définie par une expression algébrique, son domaine de définition est la plus grande partie de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) pour laquelle l'expression a du sens.

Méthode
Pour connaître le domaine de définition d'une fonction $f(x) = \dots$

1. on repère les éléments de l'expression qui peuvent ne pas avoir de sens, notamment :
   —
   —
   —
2. Pour chaque problème potentiel on trouve l'ensemble des valeurs qui sont interdites. On obtient une famille d'ensembles $A_1, \dots, A_n$.
3. Le domaine de définition de la fonction est $\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)$.

Exercice
Quel est le domaine de définition de $f(x) = \ln(x^2) + \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}$?

Définition
Soit A et B des ensembles.
- On définit un nouvel ensemble qui contient les couples dont le premier élément est dans A et le second dans B : le **produit cartésien** des ensembles A et B, on le note $A \times B$.

$$A \times B =$$

- Etant donné une application $f : A \to B$, le **graphe** de f est la partie de $A \times B$ dont les éléments sont de la forme $(a, f(a))$ (avec a dans A). On le note souvent Γ_f.

$$\Gamma_f =$$

Remarque : Si f est une fonction, la courbe représentative de f correspond à son graphe représenté dans un repère. $\mathcal{C}_f = \{(x,y)/y = f(x) \text{ et } x \in \mathcal{D}_f\}$.

Définition
Soit $f : A \to B$.
- Si A_1 est une partie de A, l'*image directe* de A_1 par f est la partie de B formée des images des éléments de A_1 par f. On la note $f(A_1)$.

$$f(A_1) =$$

- Si B_1 est une partie de B, l'*image réciproque* de B_1 par f est la partie de A formée des antécédents des éléments de B_1 par f. On la note $f^{-1}(B_1)$.

$$f^{-1}(B_1) =$$

Exemple : on considère, $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$. On a :

$$f(\mathbb{R}) = \qquad ; \quad f(]-2;5]) = \qquad ; \quad f^{-1}([0;25]) =$$

Définition
Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$.
La **composée** de f et g est l'application $\left\{ \begin{array}{l} A \to C \\ a \mapsto g(f(a)) \end{array} \right.$.

1.2 Surjectivité, injéctivité et bijéctivité

Définition
Soit A et B deux ensembles, f une application $A \to B$.
— On dit que f est **surjective** lorsque tout élément de B a un antécédent (au moins) par f. Autrement dit :

— On dit que f est **injective** lorsque tout élément de B a au plus un antécédent par f. Autrement dit :

Remarques :

a) on peut également dire que f est injective si, et seulement si, pour tout $y \in B$ l'équation $f(x) = y$ a au plus une solution.

b) Soit $f : A \to B$.
   - Si f est surjective et que Card A est fini alors :
   -

Proposition

Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$. $g \circ f : A \to C$ est alors bien définie et on a :

i. si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi ;

ii. si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

Démonstration

On montre le premier point, le second sera traité en exercice. Il s'agit de voir si tout élément $c \in C$ a bien au moins un antécédent dans A par $g \circ f$.
Soit $c \in C$. Comme g est surjective, il existe $b \in B$ tel que $g(b) = c$. De même, f étant surjective, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. On a alors $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ et donc c a bien un antécédent par $g \circ f$.
Finalement, $g \circ f$ est bien surjective. ■

Définition

Soit $f : A \to B$. On dit que f est **bijective** lorsqu'elle est surjective et injective, c'est-à-dire lorsque tout élément de B a exactement un antécédent par f. Autrement dit :

Proposition

Soit $f : A \to B$, une application bijective.
Il existe une unique application $B \to A$ appelée **réciproque** de f, notée f^{-1}, telle qu'on ait :

Remarque : f est alors la réciproque de f^{-1} et on a : $\forall y \in B,\ f \circ f^{-1}(y) = y$. Autrement dit :

$$f^{-1} \circ f = \qquad \text{et } f \circ f^{-1} =$$

Lorsqu'on veut appliquer une fonction à une équation (ou une inéquation), il faut être vigilant sur les ensembles. Pour s'en convaincre, commenter les deux exemples suivants :

a) $\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2+2x} \Leftrightarrow x+1 = x^2+2x \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) $x^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Leftrightarrow x = 3$.

Méthode
Lorsqu'on veut appliquer une fonction à une équation :

1. on détermine le **domaine de définition** $\mathcal{D}$ de l'équation c'est-à-dire les valeurs pour lesquels l'équation a du sens ;
2. on écrit « $\forall x \in \mathcal{D}$ » ;
3. on applique la fonction en n'oubliant pas que $f(a) = f(b)$ n'implique $a = b$ **que** si f est injective.

Remarque : pour une inégalité, on commence aussi par étudier le domaine de définition de la fonction mais, en plus, il faut faire attention aux variations de la fonction.

2 Généralités sur les fonctions

Dans ce paragraphe, $\mathcal{D}$ désigne une partie de $\mathbb{R}$ (le plus souvent : un intervalle ou bien une union d'intervalles).

2.1 Opérations sur les fonctions, conséquences sur les courbes représentatives

Définition
Etant données deux fonctions f et g définies sur $\mathcal{D}$, on définit de nouvelles fonctions :

- la **somme** $f + g$ est définie sur $\mathcal{D}$ par $x \mapsto f(x) + g(x)$.
- Le **produit** fg est définie sur $\mathcal{D}$ par $x \mapsto f(x)g(x)$.
- Les **combinaisons linéaires** de f et de g qui sont les fonctions $\lambda f + \mu g$ (avec λ et μ qui désignent des réels) sont définies sur $\mathcal{D}$.
- Le **quotient** $\frac{f}{g}$ est défini sur par $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

Remarque : la notion de combinaison linéaire est très importante. Les ensembles dans lesquels il est possible de faire des combinaisons linéaires seront étudiés, on les appellera *espaces vectoriels*.

La composition a été vue pour les applications, dans le cas de fonctions définies par des expressions algébriques il faut faire attention au domaine de définition :

Proposition
Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ respectivement. $g \circ f$ est définie sur :

Certaines opérations ont des conséquences géométriques sur les courbes des fonctions :

Proposition
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel non nul.

i. La courbe représentative de $x \mapsto f(x)+a$ est l'image de $\mathcal{C}$ par

ii. La courbe représentative de $x \mapsto f(x + a)$ est l'image de $\mathcal{C}$ par

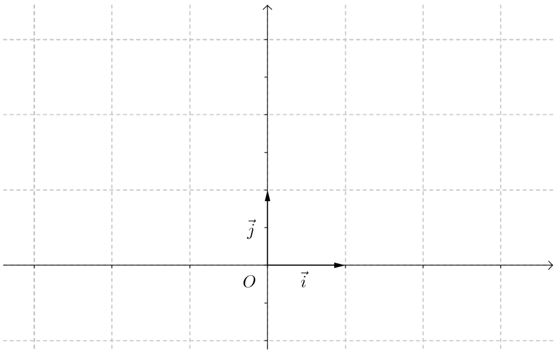
iii. La courbe représentative de $x \mapsto f(-x)$ est l'image de $\mathcal{C}$ par

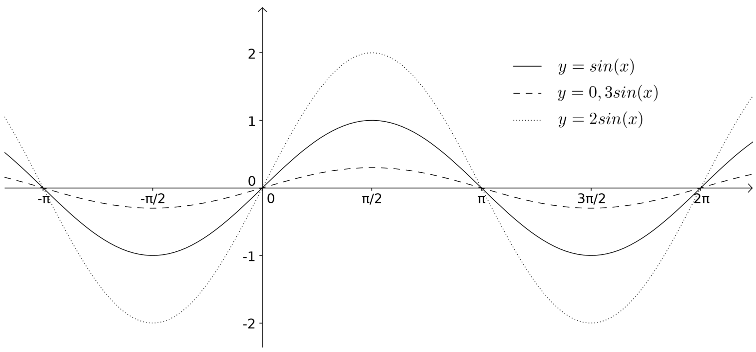
iv. La courbe représentative de $x \mapsto -f(x)$ est l'image de $\mathcal{C}$ par

v. La courbe représentative de $x \mapsto f(a-x)$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la symétrie orthogonale d'axe $x = \frac{a}{2}$.

vi. Si $a > 0$, la courbe représentative de $x \mapsto af(x)$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une dilatation verticale de rapport a.

vii. Si $a > 0$, la courbe représentative de $x \mapsto f(ax)$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une dilatation horizontale de rapport $\frac{1}{a}$.





Remarques :

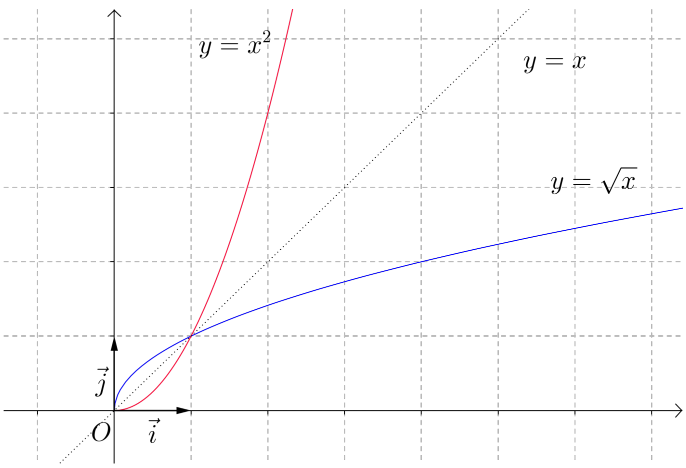
1. Les résultats précédents s'appliquent pour des fonctions dont le domaine de définition n'est pas $\mathbb{R}$ entier mais, alors, il faut faire attention au domaine de définition de la nouvelle fonction qui n'est pas nécessairement le même. Par exemple, si f est définie sur $[1;3]$ alors $x \mapsto f(2x)$ est définie sur $[\frac{1}{2};\frac{3}{2}]$.
2. La propriété reste vraie si le repère n'est pas orthonormé, les symétries ne sont plus orthogonales et il faut préciser leur direction (donnée par un vecteur). Par exemple, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{j})$ a pour direction $\vec{i}$.
3. Les dilatations sont aussi appelées des **affinités** et il faut préciser le rapport (un nombre réel non nul), la base (une droite) et la direction. Par exemple, une dilatation verticale a pour base la droite $(O, \vec{i})$ et pour direction $\vec{j}$.

Proposition

Soit $f : \mathcal{D} \to f(\mathcal{D})$ une fonction bijective et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

La courbe représentative de f^{-1} est

Exemple : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ sont des fonctions réciproques.



2.2 Majoration, minoration, variations

Définition
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

i. On dit que A est **majorée** lorsque :

ii. On dit que A est **minorée** lorsque :

iii. On dit que A est **bornée** lorsque :

iv. On dit que le réel α est le **maximum** de A lorsque :

v. On dit que le réel α est le **minimum** de A lorsque :

Exemples :

1. un ensemble majoré mais pas minoré :
2. un ensemble borné qui n'admet pas de maximum mais qui admet un minimum :

Remarques :

a) Lorsqu'il existe, le maximum est le plus petit majorant. De même, lorsqu'il existe, le minimum est le plus grand minorant.

b) Un **extremum** est un maximum ou un minimum. Le pluriel d'extremum est *extrema* (mais on voit aussi parfois extremum*s*).

Définition
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est majorée/minorée/bornée lorsque $f(\mathcal{D})$ est majoré/minoré/borné.

Exemples :

1. La fonction cos est bornée car :

2. La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas bornée car :

Définition
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}$, un intervalle.

— On dit que f est **croissante sur** I lorsque

— On dit que f est **décroissante** sur I lorsque

— On dit que f est **monotone sur** I lorsque f est croissante sur I ou bien que f est décroissante sur I.

Exemples :

a) $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[1;3]$ mais elle n'est pas monotone sur $[-2;2]$.

b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Remarque : on obtient les définitions de **strictement croissante** et **strictement décroissante** en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition précédente. Un fonction strictement croissante ou bien strictement décroissante est dite **strictement monotone**.

Méthode

Pour appliquer une fonction f à une inéquation :

1. on détermine le *domaine de définition* de l'inéquation $\mathcal{D}$.
2. Si les deux membres de l'inéquation prennent leurs valeurs dans un intervalle sur lequel f est monotone, on applique f :
   — en changeant le sens de l'inégalité si f est croissante,
   — en ne changeant pas le sens de l'inégalité si f est décroissante.
3. Sinon, on procède par disjonction de cas pour se ramener àen travaillant sur des intervalles où f est monotone.

Exercice

Résoudre $\dfrac{1}{x+3} < \dfrac{1}{x^2-1}$.

Réponse

Tout d'abord, le domaine de définition de cette inéquation est :

On souhaite appliquer la fonction inverse qui est monotone sur :

Il faut donc déterminer

Proposition
Soit I un intervalle, f et g deux fonctions définies sur I. Si f et g sont toutes les deux (strictement) croissantes sur I alors $f+g$ est aussi (strictement) croissante sur I.

Remarque : on a un résultat analogue pour des fonctions décroissantes.

Théorème
(théorème de la bijection)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Exemple : le fonction $f(x) = x + \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions strictement croissantes. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =$

Remarque : la bijectivité de f nous assure l'existence d'une réciproque pour f mais ne nous donne pas d'expression algébrique pour cette réciproque.

3 Dérivation et applications

Dans ce paragraphe, on rappelle les résultats vus au lycée (et on rajoute la dérivée d'une composée). La dérivation sera revue de façon rigoureuse dans un chapitre ultérieur.

3.1 Elements de théorie sur la dérivation

Dans ce paragraphe, on désigne par f une fonction définie sur un certain domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, I est un intervalle inclus dans $\mathcal{D}$ (et donc f est définie sur I).

Définition
Soit $a \in I$. Lorsqu'elle existe, la limite :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

est appelée **nombre dérivé** de f en a. On le note $f'(a)$ et on dit que f est dérivable en a.

Exemple : déterminons le nombre dérivé de $f(x) = x^2$ en $a = 3$.

Proposition
Soit $a \in I$ et soit $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère.
f est dérivable en a si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente (non verticale) au point d'abscisse $(a; f(a))$. L'équation de cette tangente est alors :

$$y =$$

Remarques :

a) La tangente peut avoir plusieurs points d'intersections avec $\mathcal{C}_f$. Le "contact tangentiel" est local, c'est-à-dire "autour de $(a; f(a))$".

b) $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a : si on connait la tangente, on déduit $f'(a)$.

c) La **fonction dérivée** f' est définie partout où f est dérivable, c'est-à-dire sur un sous-ensemble de $\mathcal{D}$, appelé **domaine de dérivabilité**.

Quelques limites remarquables s'obtiennent avec la définition du nombre dérivé :

Proposition

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \qquad ; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \qquad ; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} =$$

Démonstration
Par exemple la dernière : la limite cherchée est la définition de $\sin'(0)$. Or ce nombre dérivé existe et il vaut $\cos(0) = 1$. ■

3.2 Opérations sur les fonctions et dérivation

Pour calculer une dérivée, on a besoin de connaître le tableau des dérivées remarquables (disponible en ligne et à annexer à votre cours si vous ne le connaissez pas déjà) et des règles de calcul avec la dérivation.

Proposition
Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies et dérivables sur leurs domaines de définitions respectifs , λ et μ deux réels. Alors,

i. $f + g$, $\lambda f + \mu g$ et fg sont définies et dérivables sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Plus précisément, on a :

$$(f+g)' = \qquad ; \qquad (\lambda f + \mu g)' = \qquad ; \qquad (fg)' =$$

ii. $\frac{f}{g}$ est définie et dérivable sur :

Plus précisément, sur cet ensemble on a : $\left(\frac{f}{g}\right)' =$

iii. $g \circ f$ est définie et dérivable sur :

Plus précisément, sur cet ensemble on a : $(g \circ f)' =$

Exemple : dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x \sqrt{x^2+1}}$.

3.3 Applications de la dérivation

3.3.1 Etude locale d'une fonction

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, dérivable en $a \in \mathcal{D}_f$.

Proposition
La meilleure approximation affine de la fonction f au voisinage de a est $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$.

Remarques :

a) Ce résultat s'interprète graphiquement :

b) Cette approximation par un polynôme (ici de degré 1 ou 0) s'appelle un **développement limité**. Un chapitre dédié leur sera consacré.

c) Une application de ce résultat est la **méthode d'Euler** pour construire des solutions numériques aux équations différentielles que l'on ne sais pas résoudre.

3.3.2 Etude des variations et recherche d'extrema

Théorème
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f$. On peut déduire les variations de f à-partir du signe de sa dérivée :

- f est croissante sur les intervalles sur lesquels f' est positive,
- f est décroissante sur les intervalles sur lesquels f' est négative.

Remarque : pour alléger l'énoncé, on a omis de parler de stricte monotonie. La fonction est strictement monotone sur un intervalle si la dérivée ne change pas de signe sur cet intervalle **et** s'annule au plus un nombre fini de fois sur cet intervalle.

Méthode
Pour étudier les extrema d'une fonction dérivable $f(x)$:

1. on détermine sa dérivée $f'(x)$;
2. on étudie le signe de $f'(x)$;
3. on construit le **tableau de variations** de $f(x)$;
4. les extrema locaux et globaux se lisent dans le tableau.

3.4 Plan d'étude d'une fonction

3.4.1 Propriétés qui permettent de réduire le domaine d'étude

Définition
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

i. On dit que f est **paire** lorsque $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. D'un point de vue analytique, cela correspond à :

ii. On dit que f est **impaire** lorsque $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine. D'un point de vue analytique, cela correspond à :

iii. Soit T un réel. On dit que f est **T-périodique** lorsque $\mathcal{C}_f$ est stable par translation de vecteur $T\vec{i}$. D'un point de vue analytique, cela correspond à :

Exemples :

1. $f(x) = x^2 - 5x^4$ est paire. En effet,

2. pour tout entier n, $x \mapsto x^{2n}$ est paire.
3. pour tout entier n, $x \mapsto x^{2n+1}$ est impaire.

Lorsque la fonction à étudier présente une (ou plusieurs) des propriétés précédentes on peut restreindre son étude :

Proposition
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, T un réel.

i. Si f est paire on l'étudie sur

ii. Si f est impaire on l'étudie sur

iii. Si f est T-périodique, on l'étudie sur

Remarques :

a) une fonction peut être paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.

b) Une fonction peut être paire et périodique (par exemple :). Il suffit alors de l'étudier sur :

3.4.2 Plan d'étude d'une fonction

Méthode
Pour étudier une fonction $f(x)$:

1. on détermine son domaine de définition $\mathcal{D}_f$;
2. on détermine son domaine d'étude ($\mathcal{D}_f$ si f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique) ;
3. on étudie les limites de f aux bornes de son domaine d'étude ;
4. on justifie que f est dérivable sur son domaine d'étude puis on détermine $f'(x)$;
5. on étudie le signe de $f'(x)$, on en déduit les variations de f ;
6. on contruit le tableau de variations complet de f (d'abord sur son domaine d'étude et on complète par déduction).

Remarque : pour alléger le cours, un exemple détaillé sera présenté dans les savoirs-faire.

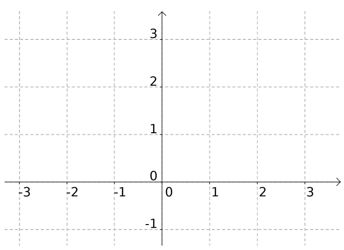
4 Fonctions de référence

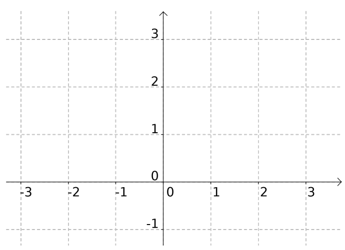
4.1 Valeur absolue, partie entière (inférieure)

Définition
Pour tout réel x,

— on rappelle que $|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

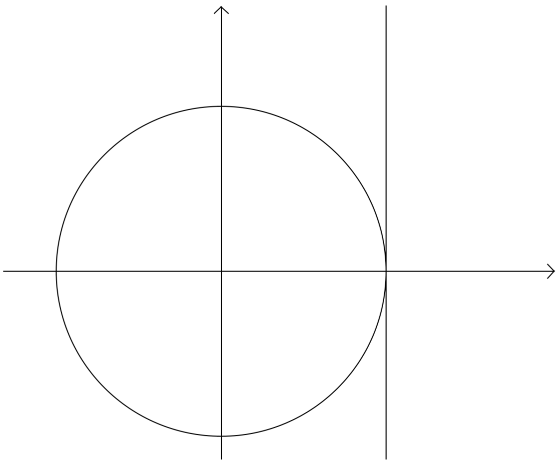
— il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$.
n est appelé la **partie entière (inférieure)** de x et noté $\lfloor x \rfloor$.

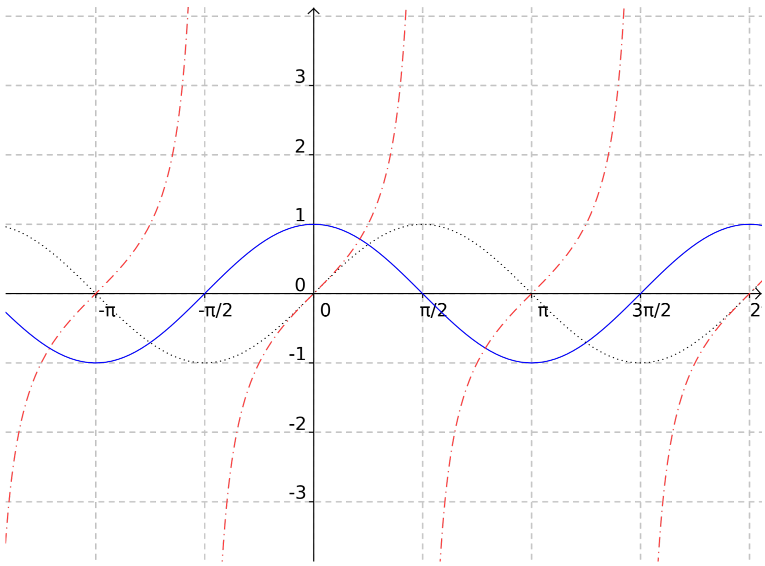




Remarque : clairement $x \mapsto |x|$ est paire car

4.2 Fonctions trigonométriques





4.3 Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions cos, sin et tan ne sont pas bijectives (voyez-vous bien pourquoi ?), elles n'admettent donc pas de réciproques.

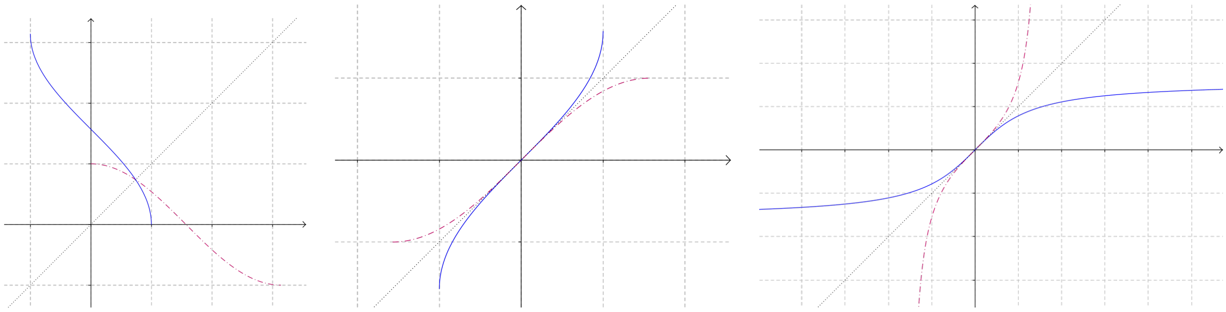
Définition
Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $A \subset \mathcal{D}_f$. La **restriction** de f à A est la fonction

Définition

i. La fonction cos réalise une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$. On appelle sa bijection réciproque arccosinus, on la note arccos.

ii. La fonction sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1;1]$. On appelle sa bijection réciproque arcsinus, on la note arcsin.

iii. La fonction tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $[-1;1]$. On appelle sa bijection réciproque arctangente, on la note arctan.



Remarque : lorsqu'on travaille avec ces fonctions, il faut faire attention aux ensembles dans lesquels on travaille. Par exemple : $\mathrm{Arccos}(\cos\frac{5\pi}{4}) = \mathrm{Arccos}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4}$.

Proposition

Les fonctions trigonométriques réciproques sont dérivables sur leur ensemble de définition et on a sur ces ensembles :

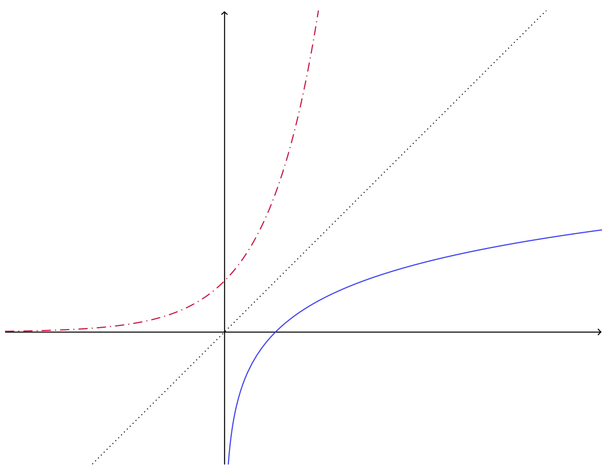
$$\mathrm{Arccos}'(x) = \qquad\qquad ; \quad \mathrm{Arcsin}'(x) = \qquad\qquad ; \quad \mathrm{Arctan}'(x) =$$

Démonstration

Par exemple pour Arccos :

Remarque : : cette méthode pour déterminer la dérivée d'une réciproque est générale.

4.4 Exponentielle et logarithme népérien



4.5 Puissances et exponentielles

Définition
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. Le nombre $\exp(b\ln(a))$ est noté a^b.

Cette notation est cohérente avec la notation habituelle pour les puissances entières.
Par exemple : si $a \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $\exp(2\ln(a)) = \exp(\ln(a^2)) = a^2$.
Finalement, ce qu'apporte cette définition, c'est du sens à a^b lorsque $a > 0$ et que b n'est pas entier.

Proposition
Les règles de calcul usuel avec les puissances entières s'appliquent toujours :

$$(\alpha\beta)^\gamma = \qquad ; \quad \left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \qquad ; \quad \alpha^{\beta+\gamma}$$

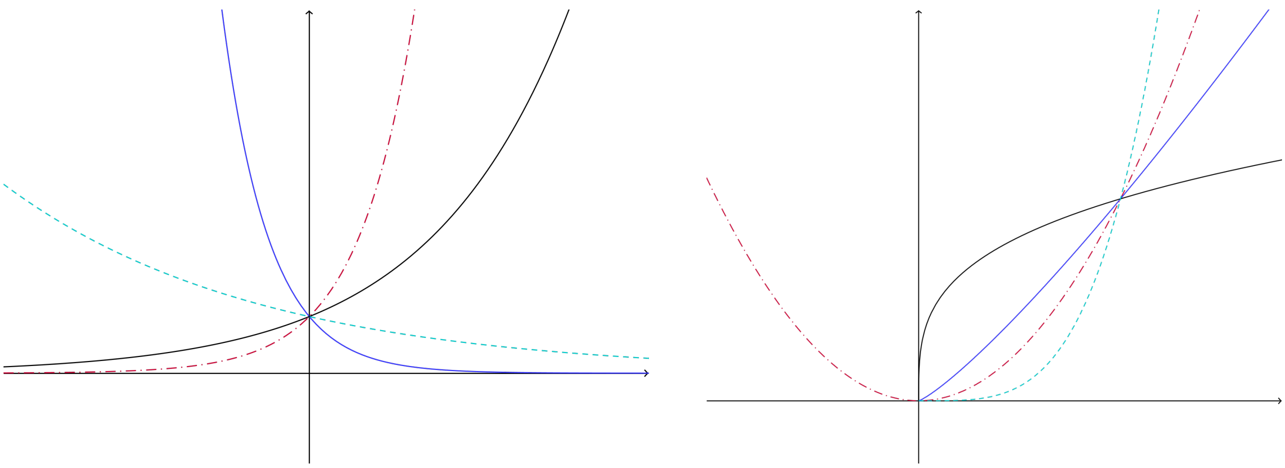
Remarque : pour simplifier la formulation de cette dernière proposition, on n'a pas précisé les conditions sur α, β et γ. Disons simplement qu'il faut les choisir pour que chaque expression ait du sens.

Définition

1. Soit $a > 0$. La fonction $\left\{ \begin{array}{l} \\ x \longmapsto a^x \end{array} \right.$ est appelée **exponentielle de base** a.
2. Soit $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. La fonction $\left\{ \begin{array}{l} \\ x \longmapsto x^b \end{array} \right.$ est appelée **puissance** b.

Remarque : l'étude détaillée de ces fonctions sera fait en exercice, leurs limites, leurs dérivées seront à savoir retrouver (il n'y a pas de difficulté particulière).

À gauche, $y = 0,3^x$, $y = 0,8^x$, $y = 1,5^x$, $y = 5^x$; à droite $y = x^2$, $y = x^{0,3}$, $y = x^{1,2}$, $y = x^{3,8}$:



Définition
La réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$ s'appelle le **logarithme décimal**.

On le note Log (ou $\log_{10}$) et son expression algébrique est : $\forall x \in \qquad \mathrm{Log}(x) =$

Remarque : le logarithme décimal sert (entre autres) en chimie.