

# Calculs dans $\mathbb{C}$

**Notations :** dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé directe  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

## 1 Généralités sur les complexes

### 1.1 Forme algébrique

#### Définition

- On note  $i$  un nombre, non réel, qui vérifie  $i^2 = -1$ .
- On appelle **nombre complexe** les nombres de la forme  $z = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  des réels. On dit alors que  $a$  est la **partie réelle** de  $z$  et que  $b$  est sa **partie imaginaire** ; on les note respectivement  $\text{Re}(z)$  et  $\text{Im}(z)$ .
- L'ensemble des nombres complexes est noté  $\mathbb{C}$ .
- Pour un complexe  $z$ , l'écriture  $z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z)$  s'appelle la **forme algébrique de  $z$** , cette écriture de  $z$  est unique.

**Exemples :**

**Remarques :**

- a) **Attention :** une partie imaginaire est un nombre réel.
- b) L'unicité de la forme algébrique signifie que, si  $z$  et  $z'$  sont deux complexes on a :

$$(z = z') \iff (\text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ et } \text{Im}(z) = \text{Im}(z'))$$

**Remarque :** l'unicité de la forme algébrique signifie qu'il y a une correspondance bijective entre  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}^2$ . On connaît d'autres correspondances bijectives entre  $\mathbb{R}^2$  et des ensembles : lesquelles ?

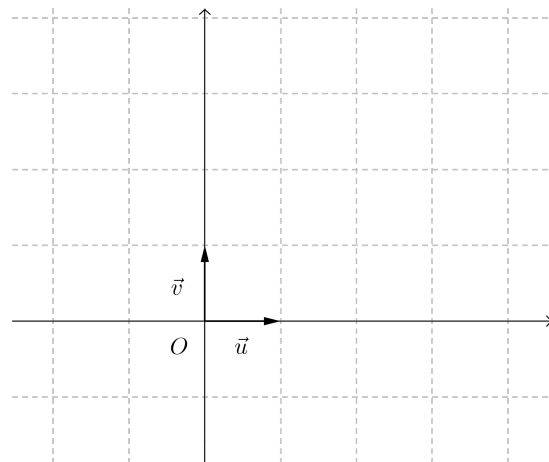
#### Définition

Soit  $z$  un complexe.

- i. On dit que le point  $M$  du plan de coordonnées  $(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$  est l'**image** de  $z$  dans le plan ; réciproquement, on dit que  $z$  est l'**affixe** du point  $M$  et on notera  $M(z)$ .
- ii. De façon analogue, on dit que  $z$  est l'**affixe** du vecteur  $\begin{pmatrix} \text{Re}(z) \\ \text{Im}(z) \end{pmatrix}$ .

**Exemples :**

- Représenter les points  $A(2 + 3i)$  et  $B(3 - i)$ .
- Que des dire des complexes dont l'image est sur l'axe des ordonnées ?
- Où sont situées les images des complexes réels ?
- Représenter  $\Gamma = \{M(z) / \text{Re}(z) < \text{Im}(z)\}$ .

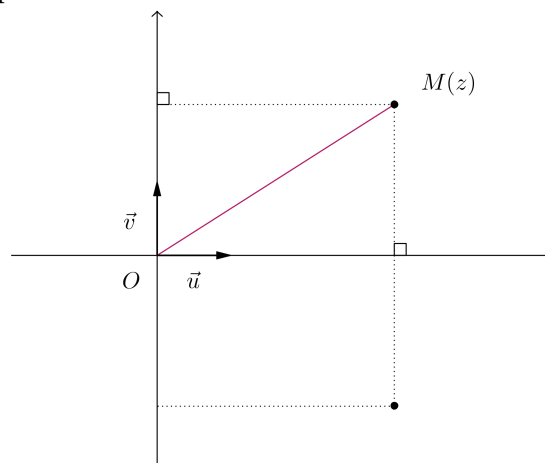


**Remarque :** le plan nous permet donc de représenter  $\mathbb{C}$ . On parle de **plan complexe**.

### Définition

Soit  $z$  un complexe,  $M(z)$  son image dans le plan complexe.

- i. On appelle **conjugué** de  $z$  le nombre complexe noté  $\bar{z}$  défini par :
- ii. Graphiquement, l'image de  $\bar{z}$  dans le plan complexe est
- iii. On appelle **module** de  $z$ , et on note  $|z|$ , la distance  $OM$ , c'est-à-dire la norme de  $\overrightarrow{OM}$ .  
On a :
- iv. Si  $z \neq 0$ , un **argument** de  $z$  désigne une mesure en radians de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ .



**Remarque :** pour un complexe non nul  $z$ , l'argument de  $z$  est donc défini à un multiple de  $2\pi$  près (il en existe une infinité). Parmi les arguments de  $z$ , on appelle **argument principal** celui qui est dans  $] -\pi; \pi]$ , on le note  $\text{Arg}(z)$ .

### Proposition

Soit  $z$  un complexe.

- i.  $|\bar{z}| = |z|$ .
- ii. Si  $z \notin \mathbb{R}^-$ ,  $\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z)$ .

### Démonstration

Ces deux résultats sont une conséquence directe des définitions géométriques de la conjugaison, du module et de l'argument. Par exemple, pour i. :

**Remarque :** pour ii. on a du préciser  $z \notin \mathbb{R}^-$  car

### Exercice

Dans le plan complexe, représenter  $\Lambda = \{M(z) / 1 < |z| \leq 2\}$  et  $\Pi = \{M(z) / \text{Arg}(z) \in [0; \frac{\pi}{6}]\}$ .

## 1.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

### Proposition

L'addition et la multiplication dans  $\mathbb{R}$  se prolongent *naturellement* à  $\mathbb{C}$ . Ainsi, pour tous complexes  $z$  et  $z'$ , on a :

- $z + z' =$
- $zz' =$

### Exemples :

1.  $(3 + 2i)^2 =$

2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(3 + i)z - 2i = 2iz$ .

**Proposition**

Soit  $A(z_A)$  et  $B(z_B)$  deux points du plan complexe. La distance  $AB$  vaut  $|z_B - z_A|$ .

**Démonstration**

soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan.

Leurs affixes complexes respectives sont :  $z_A =$  et  $z_B =$

Les coordonnées cartésiennes du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont :

On en déduit que l'affixe complexe de ce vecteur est :

La norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  vaut donc :

**Exercice**

Dans le plan complexe, représenter  $\Gamma = \{M(z) / |z + 2i + 1| < 1\}$ .

### 1.3 Propriétés du module et de l'argument

**Proposition**

Soit  $z$  un complexe. On a  $z\bar{z} = |z|^2$ .

**Démonstration**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a :

**Remarque :** en particulier, pour tout complexe  $z$ , le nombre  $z\bar{z}$  est un réel (positif). Cela permet de trouver la forme algébrique de l'inverse d'un complexe non nul, ou d'une fraction.

**Méthode**

Pour trouver la forme algébrique d'une fraction : on la multiplie et on la divise par le conjugué du dénominateur.

**Exemple :** Montrer que  $\frac{1+i}{1-i}$  est imaginaire pur.

**Proposition**

(Propriétés de la conjugaison).

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes. On a :

i. (la conjugaison est compatible avec les sommes, les produits, les quotients)

$$\overline{z + z'} = \quad ; \quad \overline{z \times z'} = \quad \text{et, si } z' \neq 0, \quad \overline{\frac{z}{z'}} =$$

ii.  $\overline{\bar{z}} =$  ;  $z + \bar{z} =$  ;  $z - \bar{z} =$

### Proposition

(Le module est compatible avec le produit et les quotients).

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes.

1.  $|zz'| =$ .
2. Si  $z' \neq 0$ ,  $|\frac{z}{z'}| =$ .
3.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|z^n| =$ .

### Démonstration

On se limite à i., cette démonstration sera dans le programme de colles.

### Proposition

(Le module n'est pas compatible avec l'addition et la soustraction).

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes. On a :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{Inégalité triangulaire})$$

### Démonstration

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes. On va raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned} (\star) : |z + z'| \leq |z| + |z'| &\iff |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 && (\text{possible car } ) \\ &\iff (z + z')\overline{(z + z')} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| \\ &\iff z\bar{z}' + \bar{z}z' \leq 2|z||z'| \end{aligned}$$

Or,  $z\bar{z}' + \bar{z}z' = 2\text{Re}(z\bar{z}')$  d'où :  $(\star) \iff \text{Re}(z\bar{z}') \leq |z||z'|$ .

On a  $|z||z'| = |z|\bar{z}' = |z\bar{z}'|$ ; la dernière inégalité devient  $\text{Re}(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'|$  qui est toujours vraie.

Par équivalences, l'inégalité triangulaire est donc démontrée.

### Remarques :

1. cette démonstration est exigible.
2. Le cas d'égalité se produit lorsque  $z$  et  $z'$  ont le même argument principal. Dans la démonstration, cela revient à avoir  $\text{Re}(z\bar{z}') = |z\bar{z}'|$  qui se produit si, et seulement si,  $z\bar{z}' \in \mathbb{R}^+$ . Nous verrons dans un prochain chapitre sur les complexes que l'argument d'un produit est la somme des arguments et on pourra conclure.

## 2 Equations du second degré

### 2.1 Racines carrées complexes

#### Théorème

Soit  $a$  un nombre complexe non nul.

L'équation  $z^2 = a$  admet exactement deux solutions complexes, qui sont opposées l'une de l'autre.

**Remarque :** les solutions sont appelées **racines carrées** de  $a$ . 0 a une seule racine carrée.

**ATTENTION :** Le symbole radical ( $\sqrt{\quad}$ ) est réservé pour les réels positifs..

Plutôt qu'une démonstration, on va prendre un exemple :

**Remarque :** en particulier, les nombres réels ont des racines carrées simples à trouver. Par exemple :

— les racines carrées de 7 :

— les racines carrées de  $-12$  :

## 2.2 Résolution des équations du second degré

### **Théorème**

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ , l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  admet une ou deux solutions.

Plus précisément, en notant  $\Delta = b^2 - 4ac$  et en prenant  $\delta$  une racine carrée de  $\Delta$  les solutions de  $az^2 + bz + c = 0$  sont :

**Remarques :**

- tout complexe admet au moins une racine carrée, on a donc le droit d'en choisir une de  $\Delta$ .
- Si  $\Delta = 0$  alors

### Démonstration

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ , notons  $(E) : az^2 + bz + c = 0$ . On a :

**Remarque :** dans le cas particulier où les coefficients sont réels alors

## 2.3 Somme et produit des racines

### Proposition

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ , soit  $z_1$  et  $z_2$  les solutions (éventuellement identiques) de  $az^2 + bz + c = 0$ .

On a :  $z_1 + z_2 =$  et  $z_1 z_2 =$

### Proposition

Soit  $a$  et  $b$  des complexes. Les solutions du système  $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$  d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$  sont les racines (éventuellement égales) de  $X^2 - aX + b$ .

### Démonstration

Cela provient du développement de  $(X - x)(X - y) = X^2 - (x + y)X + xy$ . ■

## 3 Fonctions de la variable réelle à valeurs complexes

### Définition

Soit  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$  et  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ .

- i. On appelle **partie réelle** de  $f$  la fonction  $\text{Re}(f) : \begin{cases} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{Re}(f(x)) \end{cases}$ .
- ii. On appelle **partie imaginaire** de  $f$  la fonction  $\text{Im}(f) : \begin{cases} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{Im}(f(x)) \end{cases}$ .
- iii. On dit que  $f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}$  lorsque  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  le sont.  
On dit alors que la **dérivée** de  $f$  est la fonction  $f' = \text{Re}(f) + i\text{Im}(f)$ .

### Exercice

Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction  $f(x) = (1 + 3i) \ln x - (1 + i)x^5$ .