Devoir Libre Obligatoire $n°2$

PSI

MATHEMATIQUES

A rendre mardi 22 Septembre 2020

A rédiger par binôme.

Je vous conseille malgré tout de chercher l'ensemble du sujet.

Prévoir au moins 5 heures pour ce devoir. Commencez-le le plus rapidement, de façon à revenir plusieurs fois si besoin sur la même question, après avoir éventuellement demandé de l'aide à un camarade ou à moi-même.

Exercice 1. $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites réelles indexées sur $\mathbb{N}$.

On considère l'ensemble $\mathcal{R}$ défini par :

$$\mathcal{R} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n\}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soit l'application définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$$

   (a) Montrer que φ est un isomorphisme.

   (b) En déduire que $\mathcal{R}$ est de dimension finie et en préciser sa dimension.

3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{1}{2^n},\ b_n = \dfrac{n}{2^n},\ c_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

   (a) Montrer que $B = ((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}})$ forme une base de $\mathcal{R}$.

   (b) En déduire le terme général u_n d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{R}$, en fonction de (u_0, u_1, u_2).

4. (a) Ecrire la matrice de φ dans la base B de $\mathcal{R}$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Comment retrouve-t-on rapidement par cette matrice que φ est un isomorphisme ?

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*, (A, B, C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^3, D \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$.

1. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est inversible ssi $AD - BC$ l'est.
3. En utilisant ce qui précède, calculer

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{vmatrix}$$

Exercice 3. Nature des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n}{1+\sqrt{n}}$ où $\alpha > 0$.
2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$.
3. $\sum\limits_{n\geqslant 2} (\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}})$.

Exercice 4.

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, écrire la relation qui existe entre $\sin(2\theta), \cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
2. Soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
   (a) Déterminer $(\lambda \in \mathbb{R}, x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tels que $\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = \lambda \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$.
   (b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$ converge et calculer sa somme.