Devoir Libre Obligatoire n°3
MATHEMATIQUES Algèbre
PSI
à rendre le vendredi 21 Octobre 2021 à Mme ZAROUF

Exercice I

On pose $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in E$. On considère l'application f définie sur E par $\forall M \in E, f(M) = AM$.

On note $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. Donner sa matrice B dans la base canonique de E.
4. Calculer la trace de f.f est-il un projecteur ?
5. Calculer $\det f$. Que peut-on en conclure ?
6. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Ker}(f - 5Id_5)$.
7. Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - 5Id_5) = E$.
8. Montrer que B est semblable à :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

9. On considère une matrice $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = D$. On note g l'endomorphime de E dont M est la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$ où $D = Mat_{\mathscr{B}'}(f)$.
   (a) Comment se traduit l'équation $M^2 = D$ à l'aide des endomorphismes associés ?
   (b) En déduire que g et f commutent.
   (c) Justifier que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f - 5Id_5)$ sont stables par g.
   (d) En déduire que M est une matrice diagonale par blocs et finir de résoudre dans E, l'équation $M^2 = D$.
10. Question indépendante du reste : Montrer que $C = \{M \in E / AM = MA\}$ est un sous espace vectoriel de E. En donner une base et sa dimension.

Exercice II

On donne, pour $n \in \mathbb{N}^*$, n réels $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et les matrices suivantes :

– la matrice circulante droite $D_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & \cdots & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$

– la matrice circulante gauche $G_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ a_n & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$

– $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Soit $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$ et $\forall k \in \{1..n\},\ \theta_k = e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n}}$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit

$$V_\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \theta^2 \\ \vdots \\ \theta^{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\forall k \in \{1..n\},\ \theta_k^n$ et en déduire que, $\forall k \in \{1..n\},\ \dfrac{1}{\theta_k^j} = \theta_k^{n-j}$.

1. Vérifier que : $\forall k \in \{1..n\},\ D_n V_{\theta_k} = ^t (P(\theta_k), \theta_k P(\theta_k), \theta_k^2 P(\theta_k), \cdots, \theta_k^{n-1} P(\theta_k))$.
2. Soit la matrice de Vandermonte $V_n(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$.
Calculer $D_n V_n(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ et en déduire $\det(D_n)$.
3. Calculer JD_n et en déduire $\det(J)$ puis $\det(G_n)$.
4. Application :

a) (i) Calculer, pour tout $x \neq 1, P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

(ii) En déduire pour tout $x \neq 1, Q(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

b) En déduire $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.

c) En considérant que, pour tout $j \in \{1, ..n\}$, $\theta_j - 1$ sont les racines du polynôme $(X+1)^n - 1$ et en utilisant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, montrer que $\prod\limits_{j=2}^{n} (\theta_j - 1) = (-1)^{n-1} n$.

d) Déduire de ce qui précède

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & \cdots & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$