Sujet $n°1$

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?
2. Montrer que , pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Ker}(M_a + I_3)$ est de dimension 1. Donner une base de cet espace.
3. Montrer que, pour une certaine valeur de a, $\operatorname{Ker}(M_a - I_3)$ est de dimension 2 et pour toute autre valeur de a, cet espace est de dimension 1. On déterminera à chaque fois une base de cet espace.
4. Montrer que dans le cas où $\dim \operatorname{Ker}(M_a - I_3) = 2$, M_a est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. Montrer que dans le cas où $\dim \operatorname{Ker}(M_a - I_3) = 1$, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Comment retrouve-t-on le résultat du 1 dans les deux questions précédentes ?

Exercice 2

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.

Soit $p \in \mathbb{N}$.$[\![-1, p]\!]$ désigne les entiers compris entre -1 et p. Pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, on définit les fonctions f_k sur J par:

$$\forall x \in J,\ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \ \text{ et } \forall k \in [\![0, p]\!],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

1. **Etude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions**

   1.1. Soit $(a_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $(\star)$ $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle.

   Démontrer que $a_{-1} = 0$. (*Indication: faire tendre x vers $+\infty$ dans* $(\star)$)

1.2. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (f_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ est libre.
On note $E = vect\,(\mathcal{B})$.

1.3. En déduire la dimension de E.

2. On note u l'application qui à toute fonction de E associe la fonction g définie sur J par:

$$\forall x \in J,\ g\,(x) = (1 + x)\, f'\,(x)\,.$$

2.1. Déterminer, pour $k \in [\![-1, p]\!]$, les images de f_k par u.

2.2 Vérifier que u est un endomorphisme de E.

2.3. Déterminer le noyau et l'image de u.

2.4. Préciser $u^{-1}\,(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de f_{-1}.

2.5. Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$. Présenter M comme une matrice diagonale par blocs.

2.6. Calculer M^2.