Devoir Libre $n°6$
PSI
MATHEMATIQUES
A rendre le 16 Décembre 2022

Vous avez le choix entre deux sujets : Niveau I type e3A/CCINP ou Niveau II type Mines / Centrale.

Sujet Niveau I

Exercice 1. On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t+t^3}}\,\mathrm{d}t$ et φ par :$\varphi(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t+t^3}}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier que F est C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$ et donner F'.
2. Écrire φ en fonction de F puis en déduire que φ est C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$ et donner φ'.
3. Donner les variations de φ.
4. Quelles sont les natures des intégrales $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t+t^3}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t+t^3}}\,\mathrm{d}t$
5. En déduire que φ est prolongeable par continuité en 0 et la limite de φ en $+\infty$. *On note toujours φ , le prolongement sur $\mathbb{R}^+$.*
6. Trouver deux fonctions f et g telles que $\forall x > 0, f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x)$ et retrouver les résultats de la question précédente. *Soigner la rédaction de l'utilisation du théorème des gendarmes.*
7. Établir le tableau de variations de φ.
8. φ est-elle dérivable en 0 ?
9. Donner l'allure de la représentation graphique de f.

Exercice 2. Trouver le terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 & u_1 = -1 & u_2 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+3} = 3u_{n+2} - 4u_n & \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) &=& 3x(t) - 5y(t) + 2z(t) \\ y'(t) &=& 2x(t) - 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) &=& -x(t) + y(t) \end{cases}$$

Sujet Niveau II

Exercice

On considère la fonction φ par :$\varphi(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t+t^3}}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier que φ est C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$ et donner φ'.
2. Donner les variations de φ.
3. Quelles sont les natures des intégrales $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t+t^3}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t+t^3}}\,\mathrm{d}t$
4. En déduire que φ est prolongeable par continuité en 0 et la limite de φ en $+\infty$. *On note toujours φ , le prolongement sur $\mathbb{R}^+$.*
5. Retrouver les résultats de la question précédente en établissant un encadrement de φ.
6. Établir le tableau de variations de φ.
7. φ est-elle dérivable en 0 ?
8. Donner l'allure de la représentation graphique de f.

Problème

Partie I :
Soit $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.
Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$.
On appelle matrice compagnon de P la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que le polynôme caractéristique χ_A de A est égal à P.
Indication : rajouter à la première ligne la combinaison $\lambda L_2 + \lambda^2 L_3 . \cdots + \lambda^{n-1} L_n$

Partie II :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Le but de cette partie est de proposer une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.
On se fixe $x \in E$ avec $x \neq 0$.

1. Soit $N = \{p \in \mathbb{N} / (x, f(x), \cdots, f^p(x))$ est une famille libre de $E\}$.
   (a) Montrer que $0 \in N$.
   (b) Montrer que $\forall p \in N, p < n$.
   (c) En déduire que N est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$.
   (d) En déduire qu'il existe un plus grand entier p_x telle que $(x, f(x), \cdots, f^{p_x}(x))$ est une famille libre de E et $(x, f(x), \cdots, f^{p_x+1}(x))$ est une famille liée de E.
   (e) Justifier que : $0 \leqslant p_x \leqslant n-1$.
2. Justifier qu'il existe des scalaires $(a_0, \cdots, a_{p_x})$ tels que :

$$f^{p_x+1}(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \cdots a_{p_x} f^{p_x}(x)$$

   Posons
   — P_x le polynôme : $P_x = X^{p_x+1} - \sum_{i=0}^{p_x} a_i X^i$.
   — $F = vect(x, f(x), \cdots, f^{p_x}(x))$
3. (a) Montrer que F est stable par f.

   On note g l'endomorphisme de F induit par f .
   (b) Donner la matrice A de g dans la base $(x, f(x), \cdots, f^{p_x}(x))$ de F.
   (c) En utilisant la partie I, donner son polynôme caractéristique χ_g.
   (d) Justifier que $\chi_g(f)(x) = 0$.
4. On considère un supplémentaire G de F dans E. Ainsi $E = F \oplus G$.
   (a) Montrer que, dans une base de E adaptée à cette décomposition , la matrice de f est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

   où B, C sont des matrices qu'on ne cherche pas à expliciter.
   (b) En déduire qu'il existe un polynôme Q tel que $\chi_f(X) = Q(X)\chi_g(X)$.
   (c) Justifier que $\chi_f(f)(x) = 0$.
5. En déduire que χ_f est un polynôme annulateur de f.