Devoir Libre $n°6BIS$
PSI
MATHEMATIQUES
Concours Mines-Ponts (calculatrices interdites)

Dans tout le problème I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, qui pourra être $[0,1]$ ou $[0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une densité (de probabilité) sur I si elle est **continue** et **positive** sur I, intégrable sur I et de masse 1 c'est-à-dire :

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dira que le moment d'ordre n d'une densité est fini si :

$$x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } I,$$

et on définit alors le moment d'ordre n par le réel :

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x)\mathrm{d}x.$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1}$$

I – Quelques exemples

1. On considère $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [0,+\infty[$, $g(x) = e^{-x}$. Montrer que g est une densité sur $[0,+\infty[$, que tous ses moments sont finis et calculer $m_n(g)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.
3. Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?
4. Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$.
   On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible.
5. Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante : une densité est-elle déterminée par l'ensemble de ses moments ? Autrement dit, est-il vrai que

si deux densités f et g ont tous leurs moments finis et
$m_n(f) = m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f = g$ sur I ?

On va notamment voir que c'est vrai si $I = [0,1]$ (partie III), mais faux si $I = [0,+\infty[$ (partie V) ou $I = \mathbb{R}$.

II – Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

6. Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

7. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

8. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

9. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant Cn,$$
pour une constante $C > 0$ à préciser.

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,
$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2}$$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :
$$X = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha\right\} \text{ et } Y = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}.$$

10. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$
où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

11. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :
$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

III – Le problème des moments sur $[0,1]$

On considère ici deux densités f et g sur $I = [0,1]$ et on suppose donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(f) = m_n(g).$$

12. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P, on a :

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))P(x)\mathrm{d}x = 0.$$

On sait par la partie II qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f - g$ sur $[0,1]$.

13. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\mathrm{d}x.$$
14. Montrer alors que $f = g$ sur $[0,1]$.

IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose :
$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi}\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

où φ est définie en (1).

15. Justifier que $\hat{\varphi}$ est correctement définie On admet qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
16. On admet que $\hat{\varphi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} t e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

17. Montrer que $\hat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.
18. Montrer que $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Dans la suite et si besoin on admettra que ceci reste valable pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

V – Le problème des moments sur $[0,+\infty[$

Dans cette partie on considère $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

19. Montrer que f est bien une densité sur $[0,+\infty[$. On admettra que tous ses moments sont finis.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln(x)) \mathrm{d}x.$$

20. Montrer que :

$$I_n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u \right),$$

où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z.

21. À l'aide de la partie IV, en déduire que $I_n = 0$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x)(1 + \alpha \sin(2\pi \ln(x))) & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

22. Déterminer une infinité non dénombrable de α pour lesquels f et g_α sont deux densités sur $[0,+\infty[$, distinctes et $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fin du problème