Devoir Libre $n°7$
PSI
MATHEMATIQUES
A rendre le 28 Janvier 2023

Sujet Niveau CCINP/E3A

Le problème I doit être entièrement abordé ainsi que les parties 1 et 3.1 du problème II. Sachez que l'étude des matrices stockastiques est un sujet de concours très récurrent quelque soit le niveau du concours. Je vous conseille ainsi de l'avoir travaillé avant les concours.

Problème I - Les urnes de Pólya

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E|F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P(X_{n+1} = 1|S_n = k)$.

5. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b + r + n}.$$

où $E(S_n) = \sum\limits_{k=b}^{n+b} kP(S_n = k)$.

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $(S_n = 1)$ avec les événements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
8. Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n + 1) = \frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n + 2]\!] \times [\![1, n + 1]\!]$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k | S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i)\ \ell \notin \{k - 1, k\}, \qquad (ii)\ \ell = k - 1, \qquad (iii)\ \ell = k.$$

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n + 1]\!]$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k - 1}{n + 2} P(S_n = k - 1) + \frac{n + 2 - k}{n + 2} P(S_n = k).$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n + 1]\!]$.

Problème II

Notations et définitions

- $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est plus simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être considéré comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- On identifie un élément de $x \in \mathbb{K}^n$ à une matrice colonne et si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on note $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$.
- Une suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est dite convergente si toutes les suites coordonnées $(M_p(i, j))_{p\in\mathbb{N}}$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ convergent. La limite est alors l'élément de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les limites des suites coordonnées.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on note

  $$\rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

  Cette quantité s'appelle le rayon spectral de A.
- Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, on identifie la loi P_X de X au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.

Objectifs

L'objet de ce problème est d'étudier la suite des puissances d'une matrice stochastique. La première partie est consacrée à cette étude dans le cas où $n = 2$. Dans la seconde partie, on étudie le spectre des matrices stochastiques. Dans la troisième partie, on étudie l'existence d'une probabilité invariante par une matrice stochastique et la dernière partie est consacrée à l'étude des puissances d'une telle matrice.

1 Cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et, pour $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on note :

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Il pourra être utile de noter $\lambda = 1 - (\alpha + \beta)$.

1.1 Puissances de $A(\alpha, \beta)$

1. Montrer que 1 est valeur propre de $A(\alpha, \beta)$ et déterminer le sous-espace propre associé.
2. Montrer que $A(\alpha, \beta)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la diagonaliser.
3. Calculer, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, la matrice $A(\alpha, \beta)^p$.
4. Montrer que, pour $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$, la suite $(A(\alpha, \beta)^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L(\alpha, \beta)$ que l'on précisera. Que se passe-t-il pour $(\alpha, \beta) = (1, 1)$?

1.2 Applications

Soient α et β deux réels de $]0, 1[$. Un message binaire de longueur ℓ, c'est à dire une suite finie $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell)$ où pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ $a_i \in \{0, 1\}$, est transmis dans un réseau formé de relais. On suppose que, à chaque relais, un élément $x \in \{0, 1\}$ est transmis avec une probabilité d'erreur égale à α pour un passage de 0 à 1 et β pour un passage de 1 à 0. On note X_0 la variable aléatoire définissant le message initial de longueur ℓ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, au n-ième relais, le résultat du transfert est noté X_n. On suppose que les relais sont indépendants les uns des autres et que les erreurs sur les bits constituant le message sont indépendantes.

5. **Cas $\ell = 1$**
   Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:
   $$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$$
   calculer, pour $n > 0$, $\mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 1 | X_0 = 1)$.
   Si $r = \min\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$, montrer que la probabilité pour que X_n soit conforme à X_0 est supérieure ou égale à
   $$r + (1 - r)(1 - \alpha - \beta)^n$$
6. **Cas $\ell >= 1$**
   On pose $X_n = (X_n^1, \ldots, X_n^\ell)$ où, pour $k \in \{1, \ldots, \ell\}$, X_n^k est le résultat de la transmission du k-ième bit au n-ième relais. Soit Q_n la probabilité pour que le message X_n soit conforme au message initial. Montrer que Q_n vérifie :
   $$Q_n \geq (r + (1 - r)(1 - \alpha - \beta)^n)^\ell$$

7. On suppose dans cette question que $\alpha = \beta$. Que peut-on dire dans ce cas de l'inégalité précédente ?
   Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, déterminer un entier n_c tel que la probabilité d'obtenir un message erroné au n-ième relais pour $n \geq n_c$ soit supérieure ou égale à ε (on dit que n_c est la taille critique du réseau).

2 Spectre des matrices stochastiques

Dans cette partie, les matrices considérées sont carrées d'ordre $n \geq 2$. On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique (respectivement strictement stochastique) si et seulement si elle est à coefficients positifs (respectivement strictement positifs) et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

2.1 Coefficients

8. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique). Montrer que pours tous i, j compris entre 1 et n on a

$$0 \leq a_{i,j} \leq 1 \quad \text{(respectivement } 0 < a_{i,j} < 1\text{)}$$

9. Montrer qu'une matrice A à coefficients réels positifs est stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de A et le vecteur e de coordonnées $(1, \dots, 1)$ est un vecteur propre associé.
10. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques (respectivement strictement stochastiques) est une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique).

2.2 Valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

11. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

12. Montrer que $\rho(A) = 1$.

2.3 Diagonale strictement dominante

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

14. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

2.4 Valeur propre de module maximal

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.

15. On désigne par $A_1 = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite de A en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne. Montrer que la matrice $A_1 - I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante. Que peut-on en déduire quant au rang de $A - I_n$?
16. Montrer que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1.
17. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}$. Montrer que $|\lambda| < 1$.

3 Probabilité invariante

On considère quatre points dans le plan numérotés de 1 à 4. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de lafaçon suivante : si elle se trouve au point i, elle y reste avec une probabilité égale à $1/10$ ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable.

3.1 Une suite de variables aléatoires

On note X_0 une variable aléatoire de loi P_0 donnant la position X_0 en l'instant $n = 0$, X_n la position du point à l'instant n et $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$ la loi de X_n.

18. Montrer qu'il existe une matrice Q, que l'on déterminera, telle que
$$P_1 = QP_0$$
calculer P_n en fonction de Q et P_0.
19. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\Pi = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$, que l'on déterminera, tel que
$$\forall i \in \{1, \ldots, 4\},\ p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{4} p_i = 1,\ \Pi = Q\Pi$$

3.2 Rapidité de convergence

20. Montrer sans calcul que Q est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
21. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q.
22. En déduire que $(Q_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice R que l'on précisera en fonction de Π et qu'il existe $r \in]0, 1[$ tel que
$$\|Q^p - R\| = O(r^p)$$
où $\|.\|$ est une norme quelconque sur $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
En déduire que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite indépendante de la loi de X_0 et interpréter le résultat obtenu.

4 Puissances d'une matrice stochastique

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique. On note

$$m = \min_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$$

Pour tout entier naturel non nul p, on note $a_{i,j}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i,j) de A^p :

$$A^p = (a_{i,j}^{(p)})_{1 \leq i,j \leq p}$$

Enfin, pour tout entier j compris entre 1 et n, on note

$$m_j^{(p)} = \min_{1 \leq k \leq n} a_{k,j}^{(p)}, \ M_j^{(p)} = \max_{1 \leq k \leq n} a_{k,j}^{(p)}$$

23. **Encadrement**
Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$

24. **Minoration**
Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}) \quad \text{et} \quad M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

25. **Majoration**
Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1-2m)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

26. **Convergence de ces suites**
En déduire que, pour tout j entre 1 et n, les suites $(m_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(M_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

27. **Conclusion**
En déduire que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L stochatique dont toutes les lignes sont identiques.