Exercice 1 : à rendre le vendredi 4 Mars 2022

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ m nombres complexes distincts deux à deux.

1. On suppose que u est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.
   On rappelle que dans ce cas, $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$, où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.
   Montrer qu'il existe des projecteurs de E, $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ non nuls, tels que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j. \qquad (*)$$
2. **Dans cette question, on ne suppose plus u diagonalisable**.
   On suppose cependant qu'il existe une suite d'endomorphismes $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ de E, non nuls et que la suite de scalaires $(\lambda_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ vérifie $(*)$.

   (2.1) Vérifier que l'on a : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j) p_j$.

   (2.2) Montrer que u est diagonalisable.
   On pourra chercher un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

   (2.3) Pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} \dfrac{X-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}$.

   2.3.1. Déterminer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,m]\!]^2$, $L_j(\lambda_i)$.

   2.3.2. Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$.

   2.3.3. Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Déterminer les composantes de P dans la base $\mathscr{B}$.

   (2.4) Prouver que l'on a : $\forall j \in [\![1,m]\!]$, $p_j = L_j(u)$.

   (2.5) Montrer que $\forall j \in [\![1,m]\!], p_j$ est un projecteur et $\forall (j,k) \in [\![1,m]\!]^2,\ j \neq k \Longrightarrow p_j \circ p_k = 0$.

   (2.6) Démontrer enfin que les λ_j sont les valeurs propres de l'endomorphisme u.

Exercice 2 : à rendre le 8 Mars

Partie I

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$.

1. Démontrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \int_0^1 t^s \ln(t)\, dt$ existe et donner sa valeur.
2. <u>Etude de la fonction H</u>

   (2.1) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction H est $D_H =]-1, +\infty[$.

   (2.2) Montrer que H est monotone sur D_H.

   (2.3) Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t^\alpha (\ln(t))^2}{1-t}$ est prolongeable en une fonction bornée sur le segment $[0,1]$.

   (2.4) Démontrer que H est de classe C^1 sur D_H. Retrouver alors la monotonie de H.

   (2.5) Soit (x_n) une suite réelle de limite $+\infty$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} H(x_n)$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} H(x)$.

   (2.6) Démontrer que
   $$\forall x > -1,\ H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

   (2.7) Déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

(2.8) Soit $x > -1$.

2.8.1. Justifier la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.

2.8.2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$$

2.8.3. En déduire que

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

2.8.4. Calculer $H(0)$ et $H(1)$.

Partie 2

1. Prouver que pour tout $x > -1$ et tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{(x+k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{(x+k)^2}$$

2. Déterminer un équivalent de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. pour tout entier naturel n, on pose $u_n = H(n)$.

(3.1) Etudier la convergence des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$

(3.2) Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2-1}\, dv$$

(3.3) Donner la valeur de cette intégrale en fonction de $H\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Partie 3 Développement en série entière de la fonction H

Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note

$$Z_k = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k}$$

1. Pour tout couple d'entiers naturels (p,q), on pose $I_{p,q} = \int_0^1 t^p [\ln(t)]^q\, dt$ et on admettra que cette intégrale existe.

(1.1) Justifier que si $q \geq 1$, $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$.

(1.2) En déduire la valeur de $I_{p,q}$.

2. (2.1) Justifier l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $B_n = \int_0^1 \frac{[\ln(t)]^{n+1}}{t-1}\, dt$.

(2.2) Exprimer B_n à l'aide des intégrales $I_{p,q}$. *On pourra utiliser la série de terme général t^p.*

(2.3) Prouver enfin que $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = (-1)^n (n+1)! Z_{n+2}$.

3. En déduire alors que

$$\forall x \in]-1,1[,\ H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1) Z_{k+2} x^k$$

4. Préciser alors le rayon de convergence de la série entière obtenue à la question précédente.