Devoir Libre $n°8$
PSI
MATHEMATIQUES
A rendre le 10 Février 2023

Travail Obligatoire : les trois premières questions.

Une équation de Bessel

On se propose d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \tag{4}$$

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

1 Série entière dont la somme est solution de (4).

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $]-R, R[$.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} & = & 0 \\ c_{2k} & = & \dfrac{(-1)^k}{4^k\ (k!)^2}. \end{cases}$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$.

4. Soient $r > 0$ et f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

2 Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1.$$

5. Montrer que si $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbf{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} & \beta_0 & = & 1 \\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*, & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} & = & 0. \end{cases} \tag{5}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

6. Montrer qu'il existe un réel $M >$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$: $|\alpha_k| \leqslant \dfrac{M}{r^k}$.
7. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$|\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

8. Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$?

3 Ensemble des solutions de (4)

9. Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe C^2 sur $]0, r[$.
Montrer que la fonction $y\colon x \longmapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x\colon \longmapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

10. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

11. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \longmapsto \eta(x) + J_0(x)\ \ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

12. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.