Exercice 1 *Projeté orthogonal*

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1,1]$ et à valeurs réelles.

1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E
$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
2. On note $u\ :\ t \mapsto 1$, $v\ :\ t \mapsto t$ et $F = \mathrm{Vect}\{u, v\}$.
Montrer que la famille (u, v) est orthogonale.
En déduire une base orthonormée $(\tilde{u}, \tilde{v})$ de F.
3. Déterminer le projeté orthogonal p de la fonction $w\ :\ t \mapsto \mathrm{e}^t$ sur le sous-espace F, à laide de la formule $p = (w|\tilde{u})\tilde{u} + (w|\tilde{v})\tilde{v}$.
4. En déduire la valeur du réel
$$D^2 = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^{1} \left(\mathrm{e}^t - (a+bt)\right)^2\ \mathrm{d}t\right]$$
On pourra simplifier les calculs en utilisant le théorème de Pythagore pour montrer que $D^2 = \|w\|^2 - \|p\|^2$.

Exercice 2 *Boule unité en dimension finie*

On rappelle que les normes N_1, N_2, N_∞ sur $\mathbb{R}^3$ sont définies pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par les expressions :
$N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,
$N_1(x) = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ et
$N_\infty(x) = \max\limits_{1\le i\le 3} |x_i|$

1) Dessiner les ensembles :
$B_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ N_1(x) \le 1\right\}$,
$B_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ N_2(x) \le 1\right\}$ et
$B_\infty = \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ N_\infty(x) \le 1\right\}$

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a :
$N_\infty(x) \le N_2(x) \le \sqrt{3}N_\infty(x)$, et
$N_\infty(x) \le N_1(x) \le 3N_\infty(x)$

Exercice 3

Soit la fonction
$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \cos(2\pi x)e^{-t}$$

1. Justifier que f est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$.
2. Justifier que f est bornée sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$.
3. Préciser les valeurs de la borne inférieure $m = \inf\limits_{\{(x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}^+\}} f(x,t)$
et de la borne supérieure $M = \sup\limits_{\{(x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}^+\}} f(x,t)$.