Exercice

1. (a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$ est convergente.
   méthode : justifiez la continuité de $x \longmapsto \exp(-x^2)$ sur l'intervalle d'intégration, puis comparez en la borne impropre à une fonction intégrable de référence , par exemple à $x \mapsto x^{-2}$, en établissant que $x^2 e^{-x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

   (b) En déduire que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$ converge.

   Le but de l'exercice est de calculer la valeur de I.

2. (a) Montrer que : $\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$.

   (b) i. En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,\sqrt{n}],\ \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp\left(-t^2\right)$$
   ii. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,\sqrt{n}],\ \exp\left(-t^2\right) \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On définit les suites $(u_n)_{n\geq1}$ et $(I_n)_{n\geq1}$ par :
   $$\forall n \geq 1,\ u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t.$$
   On définit également la suite $(v_n)_{n\geq1}$ et $(I_n)_{n\geq1}$ par :
   $$\forall n \geq 1,\ v_n = \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$
   On notera que l'intervalle d'intégration des suites $(v_n)_{n\geq1}$ n'est pas le même que celui des suites $(u_n)_{n\geq1}$ et $(I_n)_{n\geq1}$.

   i. Justifier la convergence de l'intégrale généralisée v_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   N.B. : il ne s'agit bien sûr pas d'étudier ici une existence éventuelle de limite pour une suite, l'entier n est FIXÉ!!!

   ii. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq I_n.$$
   iii. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$
   En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq I_n \leq v_n$$

   On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$. On admet le résultat $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3. (a) A l'aide du changement de variable $t = \varphi_1(x) = \sqrt{n} \times \sin(x)$, exprimer u_n en fonction de a_{2n+1}.

   (b) A l'aide du changement de variable $t = \varphi_2(x) = \sqrt{n} \times \tan(x)$, montrer que :
   $$\forall n \geq 1,\ v_n = \sqrt{n} \times a_{2n-2}$$
   .
   indication : on rappelle la relation $\cos^2 t = \dfrac{1}{1+\tan^2 t}$.

   (c) En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.