Exercice 1 *e3a : Une façon (pas si) complexe de calculer* $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)}\, \mathrm{d}t$ et $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\, \mathrm{d}t$.

1. (a) Vérifier que u_n et v_n existent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer que pour tous a et b réels, on a :
   $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$, et que pour tout $t \in [0, \pi/2]$,
   $\sin((2n+2)t) - \sin(2nt) = 2\cos((2n+1)t)\sin(t)$
   (c) En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que u_n est indépendante de n et donner sa valeur.
2. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   On pose, pour tout $m \in N$, $H_m = \int_\alpha^\beta h(t)\mathrm{e}^{\mathbf{i}mt}\, \mathrm{d}t$.
   Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $\lim\limits_{m \to +\infty} H_m = 0$.
3. Montrer que la fonction $h\ :\ t \mapsto h(t) = \frac{1}{t} - \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4.
   (a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n)$.
   (b) En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$.