**Devoir Maison** $n°10$
**Sujet E3A/CCINP PSI**
**MATHEMATIQUES**
à rendre le 11 Mars 2024

# Exercice

On pose, lorsque cela est possible
$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x\sqrt{t^2-1}}$$

**Q1**. Déterminer l'ensemble de définition $I$ de $f$.

**Q2**. En justifiant son existence, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. *On pourra faire le changement de variable* $u = e^{-x}$.

**Q3**. Calculer $f(1)$. *On pourra faire le changement de variable* $t = \mathrm{ch}(u)$.

**Q4**. Calculer $f(2)$. *On pourra remarquer que la dérivée de* $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ *est égale à* $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.

**Q5**. Vérifier que $f$ est positive sur $I$.

**Q6**. Montrer que $f$ est décroissante sur $I$.

**Q7**. Prouver que $f$ est de classe $C^1$ sur $I$ et préciser l'expression de $f'(x)$. Retrouver alors le résultat de la question précédente.

**Q8**. Soit $x \in I$. Démontrer la relation
$$f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$$
*On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.*

**Q9**. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Donner l'expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.

**Q10**. Pour tout réel $x > 0$, on pose
$$\phi(x) = xf(x)f(x+1)$$
Prouver que $\phi(x+1) = \phi(x)$. Calculer $\phi(n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

**Q11**. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

**Q12**. Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$. En déduire que
$$f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbf{N}^*}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

**Q13**. En utilisant des parties entières, prouver que
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

**Q14**. Déduire des questions précédentes le tableau des variations de $f$ sur $I$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**Q15**. Prouver que la fonction $\phi$ est constante sur $\mathbf{R}^{+*}$.

# Problème

### Objectifs

Dans la **partie I**, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$ et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions. Dans la **partie II**, indépendante de la **partie I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbf{N}}$, une fonction $f$ indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

## Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t.$$

**Q1**. Montrer que la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\mathrm{d}t$.

**Q2**. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, justifier l'existence de $\Gamma_p$ et déterminer une relation entre $\Gamma_{p+1}$ et $\Gamma_p$.

**Q3**. En déduire, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la valeur de $\Gamma_p$.

**Q4**. Montrer que $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(p)}(x)$.

**Q5**. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$.

La fonction $f$ est-elle développable en série entière en 0 ?

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

**Q6**. Montrer que $g$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $g^{(p)}(x)$.

**Q7**. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a : $\left|g^{(p)}(0)\right| \geqslant p^{2p}e^{-p}$.

**Q8**. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p\geqslant 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$.
La fonction $g$ est-elle développable en série entière en $0$ ?

# Partie II – Le théorème de Borel

**Q9**. Déterminer deux nombres complexes $a$ et $b$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$ :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

**Q10**. On considère la fonction $\psi$ définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\psi(x) = \frac{1}{x-i}$.
Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$ :

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

**Q11**. Déterminer, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la dérivée $p$-ième de la fonction $\varphi_1$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

**Q12**. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $\left|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p-1}\right| \leqslant 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$.
En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a :

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

**Q13**. Pour tout réel $\alpha$, notons $\varphi_\alpha$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$ :

$$|\alpha| \cdot \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n!a_n^2 x^2}.$$

**Q14**. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!}a_n$. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$, tout entier $n \geqslant p$ et tout réel $x$, on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

**Q15**. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $u_n^{(p)}(0) = 0$, et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

**Q16**. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$ et tout réel $x$, on a :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n.$$

**Q17**. En déduire que la fonction $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$.

**Q18**. Montrer que $U(0) = a_0$ et que pour tout entier $p \geqslant 1$, on a : $U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p$.

**Q19**. Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbf{N}}$, il existe une fonction $f$ indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle.

# FIN