Devoir Maison $n°2$
PSI
MATHEMATIQUES
à rendre le 2 Octobre 2023

Exercice I

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que $\det(\lambda I_3 - A)$ est un polynôme en λ ayant trois racines distinctes. On les note λ_1, λ_2 et λ_3.
2. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note $E_i = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_3)$.
   Montrer que E_i est une droite vectorielle et donner le vecteur directeur ε_i dont la deuxième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est 1.
3. Justifier que $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner D la matrice de u dans $\mathscr{C}$. Quelle relation y-a-t-il entre A et D ?
5. Résolution d'une équation matricielle.
   (a) On considère une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$. On note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B.
   Justifier que $v^2 = u$ et que u et v commutent.
   (b) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, E_i est stable par v.
   (c) En déduire que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que : $v(\varepsilon_i) = \alpha_i \varepsilon_i$. Quelle est alors la matrice de v dans $\mathscr{C}$? (la donner en fonction de α_i où $i \in \{1, 2, 3\}$.
   (d) En utilisant $B^2 = A$, trouver les valeurs possibles de α_i où $i \in \{1, 2, 3\}$.
   (e) Trouver alors toutes les solutions de l'équation matricielle : $X^2 = A$ où l'inconnue est $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Combien y-en-a-t-il ?
6. En vous inspirant de la méthode précédente, trouver la dimension de
   $\mathscr{C}_A = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ et en déduire une base du type $(A^k)_{0 \leq k \leq n}$où n est à déterminer.

Exercice II

1. Soit n un entier naturel et $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ **deux à deux distincts** . On note $\mathcal{B}_0 = (X^i)_{0 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B} = (L_i)_{i \in \{0..n\}}$ la base de $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes d'interpolation de Lagrange associés .
   (a) Soit A la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.
      i. En utilisant les coordonnées d'un polynôme dans la base $\mathcal{B}$, donner l'inverse de A et en déduire $\det(A)$.
      ii. Rappeler les coordonnées d'un polynôme P dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire que $1 = \sum_{j=0}^{n} L_j$.
      iii. En déduire que la somme des éléments de la première ligne de A est égale à 1 et que la somme des éléments de toute autre ligne de A est égale à 0.
2. (a) Pour tout $m \in \{1, 2, \cdots, n\}$, donner les coordonnées de X^m dans $\mathcal{B}$.

(b) Pour $m \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on pose : $s_m = \sum_{k=0}^{n} a_k^m L_k(0)$.

Calculer s_m.

(c) Dans cette question, Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On pose $Q_1 = Q - \sum_{i=0}^{n} Q(a_i) L_i$.

i. Montrer que Q_1 admet au moins $n+1$ racines réelles à préciser.

ii. on pose : $s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k^{n+1} L_k(0)$ et $s_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} a_k^{n+2} L_k(0)$.

A. Déduire de la question précédente que $s_{n+1} = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} a_k$.

B. Calculer s_{n+2} en fonction de $n, \sum_{k=0}^{n} a_k, \prod_{k=0}^{n} a_k$.

(d) Dans cette question, Q est un polynôme unitaire (c'est à dire de coefficient dominant égal à 1) de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré égal n.

On suppose de plus que $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ sont des entiers relatifs vérifiant

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n$$

Pour $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on note $b_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (a_k - a_j)$.

i. Prouver que : $|b_k| \geq k!(n-k)!$.

ii. Déduire de 1.5.(c) que $\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(a_k)}{b_k} = 1$.*penser aux coefficients dominants*

iii. On définit M par $M = \max_{0 \leq k \leq n} |Q(a_k)|$. Démontrer que $M \geq \frac{n!}{2^n}$.