PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Maison $n°2$

PSI

MATHEMATIQUES

à rendre le lundi 29 Septembre 2025

Consignes

1. Pour ceux qui ont eu moins de 5/20 au DS1, vous ferez :
   — L'exercice I.
   — L'exercice II, questions 1 et 2.
   — L'exercice III en prenant $n = 4$.
2. Vous vous mettrez à 2 pour rédiger ce devoir :
   — Le premier me rédigera l'exercice I et L'exercice II, question 3.
   — Le deuxième me rédigera l'exercice II, questions 1 et 2 et l'exercice III

Exercice I

1. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ et $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.
2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Déduire de la question précédente le calcul de

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) & \cos(3b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) & \cos(3c) \\ 1 & \cos(d) & \cos(2d) & \cos(3d) \end{vmatrix}$$

3. A quelles conditions la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) & \cos(3b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) & \cos(3c) \\ 1 & \cos(d) & \cos(2d) & \cos(3d) \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice II

1. Déterminer l'unique polynôme P_0 de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P_0(-1) = 3, P_0(1) = 2, P_0(2) = -1, P_0(4) = 1$$

2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(-1) = 3, P(1) = 2, P(2) = -1, P(4) = 1$$

3. Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ aux points d'abscisse k pour $k \in [\![1, n+1]\!]$.
   (a) Comment s'écrit P en fonction des polynômes interpolateurs de Lagrange $(L_k)_{1\leq k\leq n+1}$ associés à $(1, 2 \cdots, n+1)$?
   (b) Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Montrer que $L_k(n+2) = \dfrac{(-1)^{n+1-k}(n+1)!}{(n+2-k)!(k-1)!}$.
   (c) En déduire que $P(n+2) = \dfrac{1 + (-1)^n}{n+2}$.

Exercice III

Soit la matrice de Vandermonde

$$A(a_1, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1, \cdots, a_n$ des réels.

1. Quelle est l'interprétation de cette matrice en terme de matrice de passage.
2. Dans cette question, on propose une deuxième démonstration du déterminant de Vandermonde.
   On considère le polynôme

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i) = (X - a_1)...(X - a_{n-1})$$

   (a) Que représentent les réels $a_1, \cdots, a_{n-1}$ pour le polynôme P ?

(b) Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, ..., \lambda_{n-2}$ tels que

$$P(X) = X^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i X^i$$

(c) On note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A. Montrer que

$$C_n + \lambda_{n-2}\, C_{n-1} + \cdots + \lambda_0\, C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}$$

(d) En déduire que

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

(e) En déduire la formule donnant le déterminant de Vandermonde vue en cours