Devoir Maison $n°3$
PSI
MATHEMATIQUES
à rendre le 16 Octobre 2023

Niveau I

Exercice I

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que sa somme est $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice II

1. Montrer qu'il existe une constante γ telle que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+o(1)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ converge mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

   On note $S=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

   Pour $n\geq 3$, on pose :

   $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}$, $t_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}$, $a_n=t_n-\dfrac{(\ln(n))^2}{2}$.
3. (a) Démontrer : $\forall n\geq 3$,
$$\frac{\ln(n+1)}{n+1}\leq\int_n^{n+1}\frac{\ln t}{t}\,dt\leq\frac{\ln n}{n}$$
   (b) En déduire que $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante et convergente.
4. Montrer que $\forall n\geq 3, S_{2n}=t_n-t_{2n}+\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\ln 2$.

   En déduire une expression de S_{2n}, où figurent a_n, a_{2n}, u_n.
5. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_{2n}$. *(On exprimera cette limite en fonction de γ et de* $\ln 2$*).*

   En déduire, avec soin, S.
6. En déduire
$$\frac{\ln(2)}{2}\leq\gamma\leq\frac{\ln(2)+1}{2}$$

Niveau II

Exercice I

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

1. On suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

   (a) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.

   (b) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$.

2. On suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

   (a) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$.

   (b) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \sim \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

3. Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}$.

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (b) Déterminer la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ et en déduire un équivalent de u_n.

Exercice II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n.
2. Montrer que $R_n = R_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ et $R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
3. En déduire un équivalent de R_n et la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} R_n$.