

Exercice I

Pour tous sauf Marguerite et Mathis

Donner la nature des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{t(\ln t)^3} dt, \quad 2. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}(\ln t)^3} dt, \quad 3. \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}(\ln t)^3} dt \quad 4. \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}(\ln t)^3} dt \quad 5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\cos x} dx$$

Exercice II

Pour Mathis et Marguerite

- Donner la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3 + x + 1}} dx$.
- Montrer la convergence et calculer $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Problème

Dans ce problème, on étudie la convergence et la valeur d'intégrales de la forme suivante :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(2t)}{t} dt$$

où f désigne une fonction continue de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ que l'on précisera dans la suite.

A - Cas où la fonction f est définie par $f(t) = \frac{P(t)}{t^2 + 1}$ avec P polynômiale

- (a) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = 1$, donc que $f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$.
- Déterminer dans ce cas l'expression de $\frac{f(t) - f(2t)}{t}$, en donner un équivalent en $+\infty$ et justifier la convergence de l'intégrale $I(f)$.
 - Effectuer dans l'intégrale $I(f)$ le changement de variables défini par $u = t^2$.
 - Déterminer deux réels a et b tels qu'on ait pour tout réel $u \geq 0$:

$$\frac{3}{2(u+1)(4u+1)} = \frac{a}{4u+1} + \frac{b}{u+1}$$

- En déduire la valeur de l'intégrale $I(f)$.

- (b) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t$, donc que $f(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$.
- Justifier la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(2t)}{t} dt$, et préciser leurs valeurs.
 - En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $I(f)$.

- (c) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t^2$, donc que $f(t) = \frac{t^2}{t^2 + 1}$.
- En posant $u = t^2$, calculer les intégrales $\int_0^A \frac{f(t)}{t} dt$ et $\int_0^A \frac{f(2t)}{t} dt$, pour tout réel positif A .
 - En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $I(f)$.

- (d) On suppose ici que $P(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, donc que $f(t) = \frac{a_2 t^2 + a_1 t + a_0}{t^2 + 1}$.
- En exploitant les résultats précédents, justifier la convergence et la valeur de $I(f)$.

- (e) On suppose dans cette sous-question que $P(t) = t^3$, donc que $f(t) = \frac{t^3}{t^2 + 1}$.
- Déterminer dans ce cas l'expression de $\frac{f(t) - f(2t)}{t}$, et étudier la convergence de l'intégrale $I(f)$.
 - Que dire de l'intégrale $I(f)$ si l'on suppose que $P(t) = t^n$, donc $f(t) = \frac{t^n}{t^2 + 1}$, avec $n \geq 3$?

B - Cas où la fonction f est définie par $f(t) = e^{-t}$

1. Convergence de l'intégrale $I(f)$ lorsque $f(t) = e^{-t}$

- (a) En exploitant le développement limité de l'exponentielle, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(2t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$$

En déduire qu'on peut prolonger par continuité la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ en $t = 0$.

- (b) Etablir qu'on a lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\frac{f(t) - f(2t)}{t} = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

- (c) En déduire la convergence de l'intégrale $I(f)$.

2. Calcul de l'intégrale $I(f)$ lorsque $f(t) = e^{-t}$

- (a) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, établir l'égalité suivante (en justifiant l'existence des intégrales) :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

En déduire que

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u} du + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{du}{u}$$

- (b) On considère la fonction h définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $h(u) = \frac{e^{-u} - 1}{u}$ si $u \neq 0$, et $h(0) = -1$.

Etablir que h est continue sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle admet une primitive H de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et qu'on a pour tout réel $\varepsilon > 0$ l'égalité suivante :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = H(2\varepsilon) - H(\varepsilon) + \ln(2)$$

- (c) En déduire enfin la valeur de l'intégrale $I(f)$.

3. Application au calcul d'une autre intégrale

En posant $t = -\ln(u)$ dans l'intégrale $I(f)$ étudiée dans la partie B, déterminer la convergence et la valeur de l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} du$$

Exercice I

1. Soient f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ converge, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telle que : $0 < a < b$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_a^b \frac{f(\varepsilon x)}{x} dx$.

(b) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

2. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

3. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x} dx$.

Problème

Une propriété sur les sommes de Riemann

Dans toute la suite, pour tous réels $a < b$, on note $\mathcal{D}_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues sur l'intervalle $]a, b[$, intégrables sur $]a, b[$ et vérifiant de plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

1 ▷ Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que la restriction g de la fonction f à l'intervalle $]a, b[$ appartient

à l'ensemble $\mathcal{D}_{a,b}$.

2 ▷ En posant pour tout entier $k \geq 1$, $a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{2^{k+1}}$ et $b_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{2^{k+1}}$, montrer que l'on peut choisir un entier $k_0 \geq 1$ tel

que :

$$\forall k \geq k_0, b_{k+1} < a_k.$$

En déduire que la fonction $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} k^2 \cdot 2^{k+1} \cdot (t - a_k), & \text{si il existe un entier } k \geq k_0 \text{ tel que } t \in [a_k, a_k + \frac{1}{2^{k+1}}] \\ k^2 \cdot 2^{k+1} \cdot (b_k - t), & \text{si il existe un entier } k \geq k_0 \text{ tel que } t \in [a_k + \frac{1}{2^{k+1}}, b_k] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction bien définie et continue sur $]0, 1[$, intégrable sur $]0, 1[$ et que cette fonction f n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{D}_{0,1}$.

Dans la suite, on définit la fonction : $h : \begin{cases}]0, 1[& \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}. \end{cases}$

3 ▷ Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1[$, puis

montrer que la fonction φ appartient à $\mathcal{D}_{0,1}$.

4 ▷ On note $\tilde{h}$ la restriction de la fonction h à l'intervalle $]0, \frac{1}{2}]$. Vérifier que la fonction $\tilde{h}$ est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$, puis montrer que la fonction $\tilde{h}$ appartient à $\mathcal{D}_{0, \frac{1}{2}}$.

5 ▷ Montrer que la fonction h est intégrable sur $]0, 1[$ et que :

$$\int_0^1 h(t)dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{h}(t)dt.$$

6 ▷ Prouver alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \int_0^1 h(t)dt.$$

7 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)dt.$$

En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^1 h(t)dt.$$

8 ▷ Dédurre des questions précédentes que la fonction h appartient à $\mathcal{D}_{0,1}$.

9 ▷ Montrer que :

$$\int_0^1 h(t)dt = \pi$$

10 ▷ Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, on a un équivalent de la forme :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda \sqrt{n}$$

où la constante λ est à préciser.

11 ▷ En déduire la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}$$

On considère une suite $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement supérieurs à -1 convergente de limite nulle.

12 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\epsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = 0.$$

13 ▷ En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \cdot \left(\frac{(1+\epsilon_i)(1+\epsilon_{n-i})}{1+\epsilon_n} - 1 \right) = 0.$$