Devoir Maison $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES
à rendre le 7 Novembre 2023

Exercice I

Cet exercice porte sur quelques utilisations d'une famille de polynômes de Lagrange.
Les questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{K}_n[X]$, existe-t-il des bases dont tous les polynômes sont de même degré ? Justifier bien sûr la réponse.
2. Trouver l'expression d'une fonction f telle que sa courbe représentative passe par les points $A(0,2), B(1,3), C(2,4)$ et $D(3,5)$.
3. Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs de $\mathbb{R}$. On pose :
$$F = \{f \in E / f(0) = f(1) = 0\}$$
   (a) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E.
   (b) Soit $f \in E$. Déterminer l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que : $P(0) = f(0)$ et $P(1) = f(1)$.
   (c) En déduire un supplémentaire de F dans E. On procédera par analyse-synthèse.
4. Soient $E = \mathbb{K}_n[X]$, $n+1$ scalaires distincts $x_0, x_1, \cdots, x_n$ et la famille $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ des polynômes de Lagrange associés à $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$. Pour tout $i \in \{0, 1\cdots, n\}$, on définit la forme linéaire sur E : $e_i : P \mapsto P(x_i)$.
   (a) Calculer $e_i(L_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.
   (b) En déduire que $(e_i)_{0\leq i\leq n}$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$. *on utilisera une méthode analogue à celle pour démontrer que $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ est une base de E.*
   (c) Retrouver dans votre cours de PCSI, la dimension de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$. Qu'en déduire alors pour $(e_i)_{0\leq i\leq n}$?
   (d) Soit $a \in \mathbb{K}$. Justifier que $\Phi : P \mapsto P'(a)$ et $\Psi : P \mapsto \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ sont des éléments de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.
   (e) En déduire qu'il existe $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :
$$\forall P \in E, P'(a) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$
   avec $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$.
   (f) Par la même méthode, justifier qu'il existe $(\mu_0, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :
$$\forall P \in E, \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \mu_i P(x_i)$$
   avec $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1$.

Exercice II

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^2}{n}$ diverge et donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{(\ln k)^2}{k}$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge et donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$.
3. En procédant de la même méthode démontrant que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge, démontrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n} + (-1)^n \ln(n)}$ diverge.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$. Trouver un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$. Quelle conclusion a-t-on alors ?
5. Niveau II : Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant les sommes de Riemann.

Exercice III (Niveau I)

Donner les éléments propres de :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $n \geqslant 3$.
3. f défini par $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1)$. On traitera d'abord $n = 3$ puis ensuite n quelconque.

Exercice III (Niveau II)

Notations et définitions

— soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$;
— $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$; si $P \in \mathbb{R}[X]$, on notera encore P la fonction polynomiale associée ;
— $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, et $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$;
— on note I_p la matrice identité de $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ et 0_p la matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ ne comportant que des 0 ;
— on note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$, c'est-à-dire le polynôme $\det(XI_p - A)$;
— étant donnée une matrice $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M.

Partie I – Éléments propres d'une matrice

I.1 – Localisation des valeurs propres.

On considère une matrice $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \left\{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}$.

1. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\lambda x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

2. Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \displaystyle\max_{j \in [\![1,n]\!]} |x_j|$. Montrer que : $|\lambda| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$.

   En déduire que :
$$|\lambda| \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

   Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha,\beta) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$A_n(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

3. Justifier que les valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ sont réelles.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$. Montrer que :
$$|\lambda| \leqslant |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$.

5. En utilisant la question 4, montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda = 2\cos(\theta)$.
   On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.
6. Établir, pour $n \geqslant 3$, une relation entre $\chi_{A_n(0,1)}$, $\chi_{A_{n-1}(0,1)}$ et $\chi_{A_{n-2}(0,1)}$.
   En déduire, pour $n \geqslant 3$, une relation entre U_n, U_{n-1} et U_{n-2}.
7. Montrer par récurrence sur n que pour tout $\theta \in]0,\pi[$:
$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$
8. Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) ; j \in [\![1,n]\!]\right\}$.
   Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.
   Considérons $j \in [\![1,n]\!]$ et posons $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$.
9. Montrer que pour tout vecteur propre $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$, on a :
$$\left\{\begin{array}{rcl} -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 & = & 0, \\ \forall k \in [\![2,n-1]\!],\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} & = & 0, \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n & = & 0. \end{array}\right.$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} = 0.$$

10. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on précisera la dimension.
11. Déterminer l'ensemble des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.
12. En déduire l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$.
13. En déduire, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.