

Exercice I

On désigne par n un entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n , à coefficients réels.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) \end{aligned}$$

- Montrer que $\mathcal{L}_n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Écrire la matrice de $\mathcal{L}_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Donner le spectre de $\mathcal{L}_n$. Que peut-on dire sur la dimension des sous espaces propres ?
- Comparer le degré de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ au degré de $\mathcal{L}_n(P)$ et en déduire que si un polynôme non nul appartient à $\text{Ker}(\mathcal{L}_n)$, alors il est de degré 3.
- Montrer que, si $n \geq 3$, $\text{Ker}(\mathcal{L}_n)$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X^3 - 6X^2 + 18X - 24$.
- Montrer que $\mathcal{L}_n$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ssi $n \leq 2$.
- Un exemple : $n = 5$**
 - Écrire la matrice de $\mathcal{L}_5$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$.
 - Déterminer les valeurs propres de $\mathcal{L}_5$ et leur ordre de multiplicité. Sans calculs supplémentaires, déterminer trois sous-espaces propres de $\mathcal{L}_5$.
 - Montrer que les polynômes $1, X, X^2, X^4 - 4X^3, X^5$ appartiennent à $\text{Im}(\mathcal{L}_5)$ et qu'ils en forment une base.
 - Déterminer successivement sans résoudre l'équation différentielle correspondante, l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que :

$$\begin{aligned} (i) \quad &XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) = X^5 \\ (ii) \quad &XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) = X^4 \end{aligned}$$

- En déduire selon les valeurs de l'entier p ($0 \leq p \leq 5$) l'existence de polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que :

$$XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) = X^p.$$

Exercice II

- Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1}$.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$ converge.
 - Etablir que $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(t)} dt$.
 - Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(t)} dt$ en faisant le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$.
on utilisera $\cos t = \cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2})$

Exercice III

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On pose $H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$

1. Montrer que la suite $(H(n) - \ln n)_{n \geq 1}$ converge. On note γ sa limite.
2. Proposer un algorithme traduit en Python permettant de donner une valeur approchée de γ . Donner une valeur approchée à 0.01 près.
3. Montrer que $H(n) = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

4. (a) Montrer la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)n}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)k}$.

(c) Justifier

$$\begin{aligned} H(2n+1) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}H(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \end{aligned}$$

(d) En déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$, que $S_n = 2(1 - H(2n+1) + H(n))$.

(e) En utilisant la question 3, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)n}$.

5. (a) Trouver un équivalent de u_n .

(b) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + c + o(1)$.

(c) Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

(d) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

(e) En déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.