classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Maison $n°5$
MATHEMATIQUES
Type E3A / CCINP
à rendre Vendredi 19 Décembre 2025

Exercice I

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(\ln n)^2}{n}$ diverge et donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(\ln k)^2}{k}$. *On utilisera le cours sur les séries numériques , paragraphes sur séries de Bertrand et Technique de Comparaison Séries et Intégrales : tout est à démontrer, rien n'est à appliquer comme résultat acquis*
2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge et donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$.
3. (a) Justifier que :
$$\frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n} + (-1)^n \ln(n)} = \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}} - \frac{(\ln n)^2}{n} + O\left(\frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$
   (b) En déduire la nature de $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n} + (-1)^n \ln(n)}$ *.se référer à un exemple fait dans le paragraphe Séries Alternées, chapitre Séries Numériques.*
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)$.
   (a) Trouver un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.
   (b) En utilisant que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n(1+o(1))$, donner la limite de $a_n^{\frac{1}{n}}$.

Exercice II

1. (a) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser.
   (b) Donner son polynôme annulateur unitaire de plus petit degré.
   (c) Calculer A^n.
2. (a) Montrer que $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable mais trigonalisable et la trigonaliser.
   (b) Donner son polynôme annulateur unitaire de plus petit degré.
3. On rappelle que si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, alors $P(X+1)$ est le polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i (X+1)^i$.
   Soit f défini par $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = P(X+1)$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (c) Donner ses éléments propres.
   (d) f est-il diagonalisable ?

Exercice III : Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V))\ .$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V.
Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.
Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X\,,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I - Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
   On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2\,.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1\,.$$

3. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})\,.$$

4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.
5. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

Partie III - Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

6. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})\,.$$

7. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.
On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in [\![0, n]\!]^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k \end{cases}.$$

IV.1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.
9. Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.
10. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

IV.2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

11. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.
12. En utilisant 9, en déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.
13. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.