classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Maison $n°5$

MATHEMATIQUES
Type Mines
à rendre Vendredi 19 Décembre 2025

Exercice I

1. Justifier l'existence de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{1+t^2} dt$$
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$ est une série alternée convergente.
4. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.*Attention ! On ne peut pas échanger la somme d'une série et une intégrale.*

Exercice II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)$.

1. Trouver un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.
2. En utilisant que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n(1+o(1))$, donner la limite de $a_n^{\frac{1}{n}}$.
3. Retrouver la limite de $a_n^{\frac{1}{n}}$ en utilisant les sommes de Riemann.

Exercice III

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u un endomorphisme de E, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ m nombres complexes distincts deux à deux.

1. On suppose que u est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.
   On rappelle que dans ce cas, $E = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{m} E_j$, où chaque E_j est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.
   Montrer qu'il existe des projecteurs de E, $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ non nuls, tels que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j. \qquad (*)$$
2. **Dans cette question, on ne suppose plus u diagonalisable**.
   On suppose cependant qu'il existe une suite d'endomorphismes $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ de E, non nuls et que la suite de scalaires $(\lambda_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ vérifie $(*)$.
   (a) Vérifier que l'on a : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j) p_j$.
   (b) Montrer que u est diagonalisable.
   On pourra chercher un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.
   (c) Pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} \frac{X-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}$.
      i. Déterminer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,m]\!]^2$, $L_j(\lambda_i)$.
      ii. Prouver que la famille $\mathcal{B} = (L_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$.
      iii. Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Déterminer les composantes de P dans la base $\mathcal{B}$.
   (d) Prouver que l'on a : $\forall j \in [\![1,m]\!]$, $p_j = L_j(u)$.
   (e) Démontrer enfin que les λ_j sont les valeurs propres de l'endomorphisme u.

Problème

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $M_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans K et, pour une matrice M de $M_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
- $\mathbb{K}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}, \mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $\mathrm{Re}^- = \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(z) < 0\}$.
- On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \|$ sa norme associée :

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \& \qquad \|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

- On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$

avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

- Pour $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on notera son conjugué $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$, sa partie réelle $\mathrm{Re}(X) = \frac{X + \overline{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(X) = \frac{X - \overline{X}}{2i}$.
- Si $M \in M_n(\mathbb{R})$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M est $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & MX. \end{array}$

Rappels

1. Deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{K})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
2. Soient R et S deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.R est un diviseur de S s'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $S = QR$. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Objectifs

- Il s'agit d'établir pour un système différentiel linéaire d'ordre 1, une équivalence entre des propriétés qualitatives des solutions et des conditions portant sur la nature de la matrice asssociée à ce système et de son polynôme caractéristique.
- La partie 1 concerne l'étude de propriétés de matrices semi-simples.
- La partie 2 propose de trouver une caractérisation de matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$.
- La partie 3 est consacrée à l'étude des polynômes de Hurwitz.
- Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.
- La partie 4, sur l'équivalence anoncée pour les systèmes différentiels, utilise des résultats des parties 1 et 3 .

1 Matrices semi-simples

Définition 1. Une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est dite semi-simple si elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Définition 2. Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est dite presque diagonale s'il existe

1. *deux entiers naturels p et q ;*
2. *q réels $a_1, a_2, \ldots, a_q$;*
3. *q réels non nuls $b_1, b_2, \ldots, b_i$;*
4. *une matrice D diagonale de $M_p(\mathbb{R})$ tels que $p + 2q = n$ et M est la matrice bloc suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2, b_2) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

où, $\forall j \in [\![1; q]\!] : M(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$. Si $p = 0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M. De même, si $q = 0$, alors $M = D$.

Soit A la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1 ▷ La matrice A est-elle semi-simple ?

Soit B la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ définie par $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

2 ▷ Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $M_2(\mathbb{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication : on pourra, pour un vecteur propre V de B, introduire les vecteurs $W_1 = \mathrm{Re}(V)$ et $W_2 = \mathrm{Im}(V)$.

Soit M une matrice de $M_2(\mathbb{R})$.

On suppose dans la question 3) seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\overline{\mu} = a - ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

3 ▷ Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $M_2(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

4 ▷ Démontrer que M est semi-simple si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. *M est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$;*

2. *χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.*

5 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que N est semi-simple.

6 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbb{C}[X]$ en précisant, dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $M_n(\mathbb{R})$ à une matrice presque diagonale.

2 Une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E.

On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Soit F un sous-espace vectoriel de E, différent de $\{0_E\}$ et de E.

7 ▷ Démontrer qu'il existe $k \in [\![1; n]\!]$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F et la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe. On note alors

$$\mathcal{A} = \{H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subset H \text{ et } F \cap H = \{0_E\}\} \qquad \text{et}$$
$$\mathcal{L} = \{p \in \mathbf{N}^*,\ \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H)\}.$$

8 ▷ Démontrer que $\mathcal{L}$ admet un plus grand élément que l'on nommera r.

9 ▷ Démontrer que F admet un supplémentaire G dans E stable par u.

10 ▷ On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E stable par u. Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n-1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de u.

3 Polynômes de Hurwitz

Définition 3. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit *polynôme de Hurwitz* si ses racines dans $\mathbb{C}$ appartiennent à $\mathrm{Re}^- = \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

Définition 4. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit *à coefficients strictement positifs* s'il est non nul et si, d désignant son degré, $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $a_k > 0$.

11 ▷ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que si α est une racine d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients strictement positifs, alors $\alpha < 0$.

12 ▷ Démontrer que tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.

13 ▷ Soit P un polynôme de Hurwitz de $\mathbb{R}[X]$ irréductible et à coefficient dominant positif. Démontrer que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,l) \in [\![1;n]\!]^2} (X - z_k - z_l)\,.$$

14 ▷ On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme de Hurwitz ?

15 ▷ Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont tous les coefficents sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.

16 ▷ Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbb{R}[X]$, alors on a l'équivalence : P est un polynôme de Hurwitz si, et seulement si, les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

4 Système différentiel de matrice associée semi-simple

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On note (S) le système différentiel (S) $X' = MX$, où X est une application de la variable t de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $T \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que M est semblable à T dans $M_n(\mathbb{R})$ et l'on note (S^*) le système différentiel (S^*) $Y' = TY$.

17 ▷ Démontrer que les coordonnées d'une solution X de (S) sont combinaisons linéaires des coordonnées d'une solution Y de (S^*).

Dans les deux questions suivantes 18) et 19), on suppose $n = 2$, on note alors $X = (x; y)$ où x et y sont deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'on pose $z = x + iy$.

On suppose qu'il existe a et b réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

18 ▷ Démontrer que X est solution de (S) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à déterminer. En déduire une expresssion des coordonnées des solutions de (S) en fonction de t.

Résoudre le système $X' = BX$ où B est la matrice de la question 2).

19 ▷ Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ semi-simple. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les parties réelles et imaginaires des valeurs propres de M, pour que toute solution de (S) ait chacune de ses coordonnées qui tende vers 0 en $+\infty$.

On reprend le cas général $n \geqslant 2$ et on considère les assertions suivantes :

$\mathbf{A}_1$ χ_M est un polynôme de Hurwitz ;

$\mathbf{A}_2$ Les solutions de (S) tendent vers $0_{\mathbb{R}^n}$ quand t tend vers $+\infty$;

$\mathbf{A}_3$ Il existe $\alpha > 0$, il existe $k > 0$ tels que pour toute solution Φ de (S),

$$\forall t \geqslant 0 \quad : \quad \|\Phi(t)\| \leqslant k\, \mathrm{e}^{-\alpha t} \|\Phi(0)\|.$$

Soit $T \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que T vérifie la condition suivante :

$$\text{(C)} \quad \exists \beta \in \mathbb{R}_+^*,\, \forall X \in \mathbb{R}^n : \langle TX, X \rangle \leqslant -\beta \|X\|^2.$$

20 ▷ Démontrer que $\mathbf{A}_3$ est vraie avec $k = 1$ pour toute solution Φ de (S^*).

Indication : on pourra introduire la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{2\beta t} \|\Phi(t)\|^2$.

21 ▷ On suppose que $M \in M_n(\mathbb{R})$ est semi-simple. Démontrer que les assertions $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ et $\mathbf{A}_3$ sont équivalentes.

Indication : on pourra commencer par montrer que $\mathbf{A}_3$ implique $\mathbf{A}_2$.

FIN DU PROBLÈME